GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU

THEO PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

GS. TSKH VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU

Sách dùng cho:

- Sinh viên đại học
- Sinh viên cao học
- Nghiên cứu sinh
- Cán bộ giảng dạy
- Kĩ sư thuộc ngành Xây dựng

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG - 2003

LỜI NÓI ĐẦU

Với sự phát triển của lí thuyết quy hoạch toán học, phương pháp tối ưu đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kĩ thuật nhằm mang lại hiệu quả kinh tế cao nhất.

Cuốn sách này xin giới thiệu một số bài toán tối ưu cơ bản đã được nghiên cứu và ứng dụng trong lí thuyết quy hoạch toán học và trong tính toán kết cấu xây dựng.

Tác giả đã cố gắng trình bày nội dung thành một hệ thống lí luận theo quan điểm thực dụng và hy vọng phản ánh được phần nào những thành tựu mới của phương pháp tối ưu.

Nội dung sách gồm có:

Chương một : Trình bày các phương pháp cơ bản trong lí thuyết quy hoạch toán học.

Chương hai : Bài toán tối ưu tính kết cấu theo phương pháp lực.

Chương ba : Bài toán tối ưu tính kết cấu theo phương pháp chuyển vị.

Chương bốn : Bài toán tối ưu tính kết cấu trong giai đoạn chảy dẻo.

Sách đã được làm tài liệu giảng dạy cao học tại Trường Đại học Xây dựng từ năm 1989 đến nay; làm tài liệu tham khảo cho sinh viên đại học, sinh viên cao học, cán bộ giảng dạy, nghiên cứu sinh, các kỹ sư công tác trong ngành xây dựng. Về các chương trình mẫu thuộc bài toán tối ưu, bạn đọc có thể tham khảo các tài liệu (2), (3).

Do những hạn chế khách quan và chủ quan, nội dung sách không thể tránh khỏi các thiếu sót, mong bạn đọc phê bình và góp ý.

Tác giả chân thành cảm ơn Ban biên tập Nhà Xuất bản Xây dựng đã tham gia biên tập và cho xuất bản cuốn sách này.

Tác giả

Chương Một
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TRONG LÍ THUYẾT QUY HOẠCH TOÁN HỌC

Trong vòng nửa thế kỉ nay, một ngành toán học mới - lí thuyết quy hoạch toán học- đã hình thành và phát triển mạnh mẽ do những đòi hỏi cấp bách về kinh tế để thực hiện các chỉ tiêu tối ưu: nhiều nhất, ít nhất, nhanh nhất, rẻ nhất, tốt nhất...

Với lí thuyết quy hoạch, người kĩ sư được trang bị thêm một công cụ toán học rất có hiệu lực để giải các bài toán tối ưu mà trước đây các phương pháp cổ điển chưa thể giải được.

Chương này giới thiệu một số phương pháp cơ bản về lí thuyết quy hoạch toán học. Trong phạm vi một cuốn sách nhỏ, chỉ có thể trình bày một số vấn đề cơ bản theo quan điểm thực dụng. Vì vậy, đòi hỏi độc giả thừa nhận một số định lí, cũng như các kết quả nghiên cứu đã được ứng dụng trong thực tế. Muốn tìm hiểu sâu hơn lí thuyết quy hoạch toán học, độc giả có thể tham khảo thêm các tài liệu [2], [5], [6], [7].

§1. KHÁI NIỆM VỀ BÀI TOÁN TỐI ƯU

Bài toán tối ưu đặt ra như sau: Tìm x_1, x_2, ... x_n sao cho hàm số

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.1}$$

đạt max (hay min) đồng thời thoả mãn các điều kiện:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \\ &\Phi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = d_k \\ &\Psi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \ge h_j \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Trong đó: x_1, x_2,..., x_n là các biến; b_i, d_k, h_j là các hằng số.

Một cách tổng quát, bài toán trên có thể đưa về dạng rút gọn:

Cực tiểu hoá (hoặc cực đại hoá) hàm

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.1'}$$

với điều kiện:

$$\begin{aligned} &g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le = \ge\}\, b_i \\ &i = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ta gọi hàm Z là *hàm mục tiêu*, điều kiện (1.2) hoặc (1.3) là *điều kiện ràng buộc.*

Tập hợp các giá trị $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn điều kiện ràng buộc là một *phương án*. Phương án làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị cực đại (hay cực tiểu) gọi là *nghiệm* hay *phương án tối ưu.* Miền thoả mãn các điều kiện ràng buộc gọi là *miền nghiệm.*

Bài toán tối ưu chia làm hai loại:

1) Bài toán quy hoạch tuyến tính;

2) Bài toán quy hoạch phi tuyến.

Bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng:

Cực tiểu hóa (hoặc cực đại hóa) hàm

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.4)$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} & g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq \; = \; \geq\} b_i \\ & i = 1, 2, ..., m \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Trong đó: c_j, a_{ij}, b_i là các hằng số.

Để tiện cho việc tính toán bằng phương pháp đơn hình (sẽ được trình bày sau), thường yêu cầu toàn bộ các biến không âm, do đó bài toán quy hoạch tuyến tính thường có dạng:

Cực tiểu hóa (hoặc cực đại hóa) hàm:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.4)$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq \; = \; \geq\} b_i \\ & i = 1, 2, ..., m \\ & x_j \geq o \; ; j = 1, 2, ..., n \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Trong một số trường hợp đặc biệt, một bộ phận các biến hoặc toàn bộ các biến phải là những số nguyên. Khi toàn bộ các biến đều là số nguyên, ta gọi bài toán tối ưu là bài toán *quy hoạch tuyến tính nguyên.* Khi một bộ phận các biến là số nguyên, ta gọi là bài toán *quy hoạch tuyến tính hỗn hợp.*

Trong bài toán quy hoạch phi tuyến, ít nhất trong một số hạng của hàm mục tiêu hoặc ít nhất trong một số hạng của điều kiện ràng buộc, xuất hiện tích của biến hoặc nghịch đảo của biến hoặc số mũ của biến lớn hơn 1.

Chẳng hạn, bài toán sau đây là bài toán quy hoạch phi tuyến:

Cực tiểu hóa (hoặc cực đại hoá) hàm

$$Z = 3x_1 + \frac{2}{x_1.x_2} + 5x_2^2$$

với điều kiện:

$$\frac{20}{x_1.x_2} \le 10$$
$$4x_1 + x_2 \le 25$$
$$10x_1 + 16x_2 \le 169$$

Trong tính toán kết cấu, hàm mục tiêu thường biểu thị các đại lượng như:

- Trọng lượng, thể tích kết cấu, giá cả vật liệu là những đại lượng cần được cực tiểu hóa.
- Hệ số tải trọng là đại lượng cần được cực tiểu hóa hoặc cực đại hóa tùy theo phương pháp tính toán trong giai đoạn chảy dẻo.

Các điều kiện ràng buộc dưới dạng đẳng thức thường là các điều kiện cân bằng, các phương trình công khả dĩ, các điều kiện biến dạng liên tục v.v...

Các điều kiện ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức thường là các điều kiện về độ bền, độ cứng, các điều kiện chảy dẻo v.v...

Trong thực tế, bài toán quy hoạch phi tuyến thường gặp nhiều hơn bài toán quy hoạch tuyến tính. Do đó, phần lớn các mục sau sẽ dành cho các phương pháp giải bài toán quy hoạch phi tuyến.

§2. PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

Phương pháp đồ thị áp dụng cho bài toán quy hoạch khi biến số không lớn hơn 2.

Giả sử có bài toán tối ưu:

Cực đại hóa hàm mục tiêu

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \tag{1.7}$$

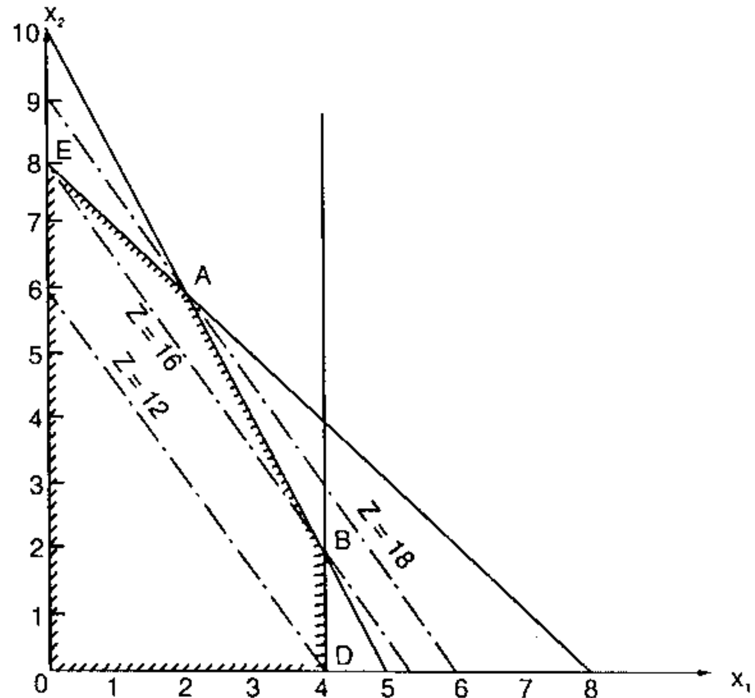
với điều kiện:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \le 10 && (a)\\ &3x_1 + 3x_2 \le 24 && (b)\\ &2x_1 \le 8 && (c)\\ &x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 && (d) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Để giải theo phương pháp đồ thị, trước hết, ta đưa hệ điều kiện (1.8) về dạng đẳng thức:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 = 10 && (a)\\ &3x_1 + 3x_2 = 24 && (b)\\ &2x_1 = 8 && (c) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Chọn trục x_1 làm trục hoành và trục x_2 làm trục tung (hình 1.1). Đường thẳng AB biểu thị phương trình (1.9a), đường thẳng EA biểu thị phương trình (1.9b), đường thẳng DB biểu thị phương trình (1.9c).



Hình 1.1

Căn cứ vào hệ điều kiện (1.8), miền nghiệm là miền gạch chéo ODBAEO. Đây là một miền lồi(*). Ta có vô số phương án trong miền nghiệm nhưng điều ta quan tâm đến là tìm phương án tối ưu. Cần chú ý rằng ứng với các giá trị khác nhau của Z, phương trình (1.7) cho ta một họ đường thẳng song song gọi là các đường mức. Đường mức càng xa gốc tọa độ, giá trị của Z tức giá trị của hàm mục tiêu càng lớn. Nếu ta tịnh tiến đường mức đến điểm A (điểm giao nhau giữa hai đường biên EA và AB) thì $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ và $Z = 18$. Nếu tịnh tiến đường mức xa hơn nữa thì phương án sẽ nằm ngoài miền nghiệm do đó phương án tối ưu là:

$$\max Z = 18 \text{ ứng với } x_1 = 2 \text{ và } x_2 = 6$$

Lí thuyết quy hoạch tuyến tính đã chứng minh được rằng khi miền nghiệm là một miền lồi, bao giờ cũng tồn tại một phương án tối ưu ít nhất tại một điểm trên đường biên của nó. Định lý này chỉ ra một hướng mò mẫm trong quá trình tính toán.

§3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Phương pháp đơn hình do G. B. Dantzig đề ra vào năm 1947. Từ đó đến nay, nó đã được sử dụng rộng rãi và được xem như một phương pháp có hiệu lực để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính.

Thực chất của phương pháp đơn hình là qua việc thành lập các bảng, từng bước cải tiến dần các phương án sao cho cuối cùng ta được một phương án tối ưu.

Cách tính cụ thể sẽ được trình bày trong một số trường hợp khác nhau.

§3.1. Trường hợp điều kiện ràng buộc mang dấu bất đẳng thức ≤

Giả sử có điều kiện:

(*) Theo định nghĩa, miền X là một miền lồi nếu ứng với hai điểm bất kì $x_1, x_2 \in X \rightarrow x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \in X,\ 0 \le \lambda \le 1$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$$
$$b_i \ge 0 \tag{a}$$

Ta có thể viết:

$$\sum a_{ij}x_j + y_i = b_i \tag{b}$$

Từ điều kiện (a), $y_i \ge 0$. Ta gọi y_i là *biến đệm.*

Vậy khi có điều kiện ràng buộc mang dấu bất đẳng thức ≤, ta đưa một biến đệm không âm vào vế trái của nó. Chẳng hạn, hệ điều kiện (1.8) có thể đưa về dạng:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + y_1 = 10 \quad (a)\\ &3x_1 + 3x_2 + y_2 = 24 \quad (b)\\ &2x_1 + y_3 = 8 \quad (c)\\ &y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Trong đó: y_1, y_2, y_3 là những biến đệm vừa đưa vào. Về thực chất, chúng là những đại lượng không dùng đến.

Vậy bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng:

Cực đại hoá hàm $$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \tag{1.11}$$

với điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i \tag{1.12}$$

$$i = 1,2,\dots,m;\ b_i \ge 0$$
$$x_j \ge 0,\ y_i \ge 0, j=1,2,\dots,n$$

Ta tiến hành phương pháp đơn hình theo trình tự sau:

Bước 1. Đưa phương trình (1.11) về dạng

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j - Z = 0 \tag{1.11a}$$

Bước 2. Thành lập bảng tính đơn hình (1.1) gồm nhiều hàng và cột n cột đầu tiên lần lượt ứng với các biến x_1, x_2,...,x_n. Trên cột thứ i, ta lần lượt ghi theo thứ tự từ trên xuống dưới các hệ số của biến x_i trong hệ phương trình (1.12) và phương trình (1.11a). Trong cột thứ (n+1), ta lần lượt ghi theo thứ tự từ trên xuống dưới các số hạng tự do của hệ phương trình (1.12) và phương trình (1.11a).

Bảng 1.1

Cột n+1

x_1	x_2	...	x_i	....	x_n		
a_{11}	a_{12}	...	a_{1i}	....	a_{1n}	b_1	y_1
...	...	...	...	....		b_2	y_2
...	...	...	...	....			
a_{k1}	...	...	a_{ki}	....	...		y_k
...	...	...	...	....	...	...	
a_{m1}	a_{m2}...	...	a_{mi}	....	a_{mn}	b_m	y_m
C_1	C_2	...	C_i	....	C_n	0	-Z

Hàng m+1

Chú thích bảng 1.1: Các mũi tên chỉ sự hoán vị sau khi chuyển sang bảng đơn hình mới.

Trong cột cuối cùng, ta lần lượt ghi thứ tự từ trên xuống dưới, các biến đệm ứng với hệ phương trình 1.12 và hàm mục tiêu đổi dấu. Các ẩn nằm trên hàng đầu tiên gọi là ẩn tự do (thí dụ $x_1, x_2, \ldots, x_n$), các ẩn nằm trên cột cuối cùng gọi là *ẩn cơ bản* (thí dụ y_1, y_2...).

Bước 3. Chọn *phần tử chốt* thỏa mãn 3 điều kiện sau đây:

1) Phần tử chốt phải nằm trên cột của bảng đơn hình với điều kiện phần tử cuối cùng trên cột đó phải là một số dương và lớn nhất so với các số trong hàng (m+1) (trừ số cuối cùng). Cột chứa phần tử chốt gọi là *cột chốt.*

2) Nếu phần tử chốt không phải là một số dương, sẽ không tồn tại phương án mới.

3) Giả sử cột chốt là cột thứ j, các phần tử trên cột chốt là a_{ij} (i = 1,2,...,m). Các phần tử trên cột thứ (n+1) là b_i (i = 1,2,...,m)

Phần tử chốt a^*_{ij} (nằm trên hàng thứ i và cột thứ j) phải thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{b_i}{a^*_{ij}} = \min \frac{b_i}{a_{ij}} \qquad (1.13)$$

$$i = 1, 2, \ldots m$$

Trong đó, b_i là phần tử nằm trong cột thứ (n+1) (xem bảng 1.1) và nằm trên hàng chứa phần tử chốt a^*_{ij}. Ta gọi hàng này là *hàng chốt.*

Bước 3. Tính nghịch đảo của phần tử chốt $\frac{1}{a^*_{ij}} = b$. Thay phần tử chốt a^*_{ij} bằng số b trong bảng đơn hình mới.

Bước 4. Nhân các phần tử trong hàng chốt của bảng đơn hình cũ với số b, ta được các phần tử tương ứng trong bảng đơn hình mới. Ta gọi các phần tử này là e_K (k = 1, 2, ..., n+1).

Bước 5. Nhân các phần tử trong cột chốt của bảng đơn hình cũ với số (-b), ta được các phần tử tương ứng trong bảng đơn hình mới.

Bước 6. Tính các phần tử còn lại trong bảng đơn hình mới từ cột này sang cột khác như sau.Gọi d_{ik} là phần tử nằm trên hàng thứ i và cột thứ k của bảng đơn hình mới; D_{ik} - phần tử nằm trên hàng thứ i và cột thứ k của bảng đơn hình cũ; f_{ip} - phần tử nằm trên hàng thứ i và cột chốt thứ p của bảng đơn hình cũ; e_k - phần tử nằm trên cột thứ k đã được tính từ bước 4.

Phần tử d_{ik} tính theo công thức:

$$d_{ik} = D_{ik} - e_k f_{ip} \qquad (1.14)$$

Căn cứ vào 6 bước trên đây, ta xuất phát từ bảng đơn hình cũ để thành lập bảng đơn hình mới. Chú ý là khi chuyển từ bảng đơn hình cũ sang bảng đơn hình mới, cần phải hoán vị ẩn tự do (nằm trên cột chốt) và ẩn cơ bản (nằm trên hàng chốt). Chẳng hạn phần tử a_{ki} khoanh tròn trên bảng (1.1) là phần tử chốt. Khi chuyển sang bảng đơn hình mới, cần phải hoán vị 2 ẩn x_i (ẩn tự do) và y_k (ẩn cơ bản). Quá trình tính toán sẽ kết thúc khi nào toàn bộ các phần tử nằm trong hàng cuối của bảng đơn hình cuối cùng đều là *số âm*.

Thí dụ 1.1.

Hãy giải lại bài toán nêu trong §2.

Trong phần trước, ta đã đưa hệ đẳng thức (1.8) về dạng hệ đẳng thức (1.10). Tiếp tục tính toán theo các bước sau:

Bước 1. Đưa phương trình (1.7) về dạng:

$$3x_1 + 2x_2 - Z = 0 \qquad (1.7a)$$

Bước 2. Căn cứ vào các đẳng thức (1.10) và phương trình (1.7a), ta lập bảng đơn hình đầu tiên (1.2a).

Bước 3. Chọn phần tử chốt. Có thể chọn cột chốt trong hai cột đầu tiên của bảng (1.2a) vì các phần tử cuối cùng trong các cột đó đều là số dương. Nhưng vì 3 > 2 (bảng 1.2a, hàng cuối), ta chọn cột đầu tiên làm cột chốt. Ta gọi cột chốt là cột thứ p (ở đây p=1). Các phần tử trong cột này $a_{ip} = a_{i1}$, i = 1, 2, 3.

Lần lượt tính các tỉ số b_i/ a_{i1}:

$b_1/ a_{11} = 10/2 = 5$; $b_2/a_{21} = 24/3 = 8$; $b_3/a_{31} = 8/2 = 4$;

Vì $b_3/a_{31} = 8/2 = 4 = \min (b_i/a_{i1})$ nên ta chọn $a^*_{31} = 2$ làm phần tử chốt (khoanh tròn trên bảng (1.2a)).

Bước 3. Xác định nghịch đảo của phần tử chốt:

$$b = 1/a^*_{31} = 1/2 = 0,5$$

Trong bảng đơn hình mới (1.2b), ta thay phần tử chốt bằng số b = 0,5.

Bước 4. Nhân các phần tử trong hàng chốt của bảng đơn hình cũ (1.2a) (hàng thứ 3) với số b = 0,5 (trừ phần tử chốt), ta được các phần tử tương ứng trong bảng đơn hình mới (1.2b):

$$e_2 = 0 \times 0,5 = 0; \;\; e_3 = 8 \times 0,5 = 4$$

Bước 5. Nhân các phần tử trong cột chốt (trừ phần tử chốt) của bảng đơn hình cũ (1.2a) với số (-b) = - 0,5, ta được các phần tử tương ứng trong bảng đơn hình mới (1.2b):

$$2.(-0,5) = -1; \; 3.(-0,5) = -1,5; \; 3.(-0,5) = -1,5.$$

Bước 6. Áp dụng công thức (1.14) để tính các phần tử còn lại trong bảng đơn hình mới (1.2b).

Cột 1: đã tính xong.

Cột 2: chú ý p = 1, $e_2 = 0$ nên

$d_{12} = D_{12} - e_2.f_{11} = 1 - 0 \times 2 = 1$

$d_{22} = D_{22} - e_2.f_{21} = 3 - 0 \times 3 = 3$

$d_{42} = D_{42} - e_2.f_{41} = 2 - 0 \times 3 = 2$

Cột 3:

$d_{13} = D_{13} - e_3.f_{11} = 10 - 4 \times 2 = 2$

$d_{23} = D_{23} - e_3.f_{21} = 24 - 4 \times 3 = 12$

$d_{43} = D_{43} - 3_3.f_{41} = 0 - 4 \times 3 = -12$

Như vậy ta đã hoàn thành bảng đơn hình mới (1.2b). Chú ý khi chuyển từ bảng (1.2a) sang bảng (1.2b), ta phải hoán vị hai ẩn x_1 (nằm trên cột chốt) và y_3 (nằm trên hàng chốt).

Tiến hành các bước tương tự như trên, ta sẽ được các bảng đơn hình mới (1.2c), (1.2d). Các phần tử khoanh tròn là các phần tử chốt đã chọn. Ta nhận thấy trong bảng đơn hình cuối cùng (1.2d), toàn bộ các phần tử trong hàng cuối cùng đều là số âm nên đến đây quá trình tính toán kết thúc. Ta được phương án tối ưu từ hai cột cuối cùng của bảng (1.2d) là:

$x_1 = 2$; $x_2 = 6$; max Z = 18 (xem 2 cột cuối)

Bảng 1.2.

(a)	x_1	x_2		
	2	1	10	y_1
	3	3	24	y_2
	(2)	0	8	y_3
	3	2	0	-Z
(b)	y_3	x_2		
	-1	(1)	2	y_1
	-1,5	3	12	y_2
	0,5	0	4	x_1
	-1,5	2	-12	-Z
(c)	y_3	y_1		
	-1	1	2	x_2
	(1,5)	-3	6	y_2
	0,5	0	4	x_1
	0,5	-2	-16	-Z
(d)	y_2	y_1		
	0,67	-1	6	x_2
	0,67	-2	4	y_3
	-0,33	1	2	x_1
	-0,33	-1	-18	-Z

§3.2. Trường hợp điều kiện ràng buộc mang dấu đẳng thức

Giả sử có điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (a)$$

Ở đây ta không đưa vào biến đệm như trong §3.1 mà đưa vào một *biến giả tạo* ở vế trái của phương trình (a):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i \qquad (b)$$

Trong đó y_i gọi là *biến giả tạo*. Việc thành lập các bảng đơn hình tiến hành tương tự như đã trình bày trong §3.1. Tuy nhiên, phải tìm cách khử dần các biến giả tạo. Để khử các biến giả tạo, ta làm như sau.

Chẳng hạn, trên bảng đơn hình (1.3), ta muốn khử biến giả tạo y_k. Ta chọn một phần tử chốt nằm cùng hàng với y_k. Phần tử chốt này phải là một số dương, không nhất thiết phải thỏa mãn điều kiện 1 của bước 3 như đã trình bày trong §3.1. Sau khi chuyển sang bảng đơn hình mới, hoán vị ẩn tự do và ẩn cơ bản (xem bảng 1.3) đồng thời xóa bỏ cột ứng với ẩn cơ bản vừa chiếm vị trí của ẩn tự do. Chẳng hạn, phần tử a_{ki} khoanh tròn là phần tử chốt (bảng 1.3). Sau khi chuyển sang bảng đơn hình mới, ta hoán vị x_i và và y_k đồng thời xóa bỏ cột y_k (tức là cột cũ ứng với x_i).

Bảng 1.3

x_1	...	x_i	....	x_n		
a_{11}...	...	...	....	a_{1n}	b_1	y_1
...	...	...	....	...	...	...
...	...	...	....	...	...	...
a_{k1}	...	a_{ki}		a_{kn}		y_k
...	...	...	....	...	...	....
...	...	...	....	...	...	...
a_{m1}	...	a_{mi}	....	a_{mn}	b_m	y_m
C_1...	...	C_i	....	C_n	0	-Z

Chú thích bảng 1.3:

1. Các mũi tên biểu thị sự hoán vị giữa x_i và y_k sau khi chuyển sang bảng đơn hình mới.
2. Sau khi chuyển sang bảng đơn hình mới, xóa cột y_k.

Thí dụ 1.2

Cực đại hóa hàm

$$Z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad (1.15)$$

với điều kiện:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 + x_3 + x_4 = 150 & (a) \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 200 & (b) \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 100 & (c) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}\right\} \qquad (1.16)$$

Sau khi đưa hai biến giả tạo y_1, y_2 vào phương trình (1.16a), (1.16b) và đưa biến đệm y_3 và phương trình (1.16c), ta có:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 + y_1 \quad &= 150 \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 + y_2 &= 200 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + y_3 &= 100 \end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

Đưa hàm mục tiêu về dạng

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - Z = 0 \qquad (1.15a)$$

Căn cứ vào hệ đẳng thức (1.7) và phương trình (1.15a), ta thành lập bảng (1.4a).

Để khử biến giả tạo y_2, ta chọn phần tử chốt khoanh tròn $a^{*}_{24} = 2$ (phần tử nằm cùng hàng với biến giả tạo trên bảng (1.4a)). Để thành lập bảng đơn hình mới (1.4b), ta thực hiện các bước như đã trình bày trong §3.1. Chú ý là sau khi hoán vị 2 ẩn x_4 và y_2, trong bảng đơn hình mới (1.4b) cần xoá bỏ cột ứng với ẩn x_4 chưa hoán vị. Sau khi khử xong 2 biến giả tạo y_1 và y_2, việc thành lập các bảng đơn hình tiếp theo hoàn toàn giống như đã trình bày trong §3.1. Bảng đơn hình cuối cùng (1.4d) cho phương án tối ưu.

Max Z = 200 ứng với $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 100$ ($x_3 = 0$ vì trong bảng (1.4d) nó đã trở thành ẩn tự do).

Bảng 1.4

(a)	x_1	x_2	x_3	x_4		
	1	0	1	1	150	y_1
	0	4	1	(2) →	200	y_2
	2	1	4	0	100	y_3
	2	-1	-2	1	0	-Z
Sau khi hoán vị x_4 với y_2, xóa ngay cột chứa x_4 (b)	x_1	x_2	x_3			
	(1) →	-2	0,5		50	y_1
	0	2	0,5		100	x_4
	2	1	4		100	y_3
	2	-3	-2,5		-100	-Z
Sau khi hoán vị x_1 với y_1, xóa ngay cột chứa x_1 (c)		x_2	x_3			
		-2	0,5		50	x_1
		2	0,5		100	x_4
		(5) →	3		0	y_3
		1	-3,5		-200	-Z
(d)			x_3			
			1,7		50	x_1
			-0,7		100	x_4
			0,6		0	x_2
			-4,1		-200	-Z

§3.3. Trường hợp điều kiện ràng buộc mang dấu bất đẳng thức ≥

Giả sử có điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \geq b_i \qquad \text{(a)}$$
$$b_i \geq 0$$

Bất đẳng thức (a) có thể viết:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j - x_{n+1} = b_i \qquad \text{(b)}$$

Trong đó $x_{n+1} \geq 0$ được gọi là *biến dư*. Vậy khi điều kiện ràng buộc mang dấu bất đẳng thức ≥ 0, ta đưa vào vế trái của nó một biến dư không âm để tạo thành một đẳng thức. Khác với biến đệm, biến dư xem như biến chính thức của bài toán quy hoạch tuyến tính. Nó được đưa vào hàm mục tiêu bằng cách đặt hệ số tương ứng bằng không. Vì vậy, trong trường hợp đưa vào biến dư, việc tính toán hoàn toàn giống như đã trình bày trong §3.1. Sau đây ta xét một thí dụ hỗn hợp, vừa có biến đệm, vừa có biến giả tạo, vừa có biến dư.

Thí dụ 1.3

Cực đại hóa hàm

$$Z = 4x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad (1.18)$$

với điều kiện

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 8 \quad (a)\\ x_2 + x_3 &= 10 \quad (b)\\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 30 \quad (c)\\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} (1.19)$$

Bất đẳng thức (1.19a) mang dấu ≥ nên ta đưa vào biến dư x_4. Nhưng sau khi trở thành đẳng thức, cần phải đưa vào biến giả tạo y_1 vì x_4 xem như biến chính thức. Trong đẳng thức (1.19b), ta đưa vào biến giả tạo y_2 và trong bất đẳng thức 1.19c (mang dấu ≤) đưa vào biến đệm y_3. Do đó, điều kiện (1.19) trở thành

Bảng 1.5

(a)	x_1	x_2	x_3	x_4		
	1	①	1	-1	8	y_1
	0	1	1	0	10	y_2
	1	1	2	0	30	y_3
	4	2	-1	0	0	-Z
(b)	x_1		x_2	x_4		
	1		1	-1	8	x_2
	-1		0	①	2	y_2
	0		1	1	22	y_3
	2		-3	2	-16	-Z
(c)	x_1		x_3			
	0		1		10	x_2
	-1		0		2	x_4
	①		1		20	y_3
	4		-3		-20	-Z
(d)	y_3		x_3			
	0		1		10	x_2
	1		1		22	x_4
	1		1		20	x_1
	-4		-7		-100	-Z

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + y_1 &= 8 \\ x_2 + x_3 + \quad y_2 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \quad y_3 &= 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad y_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Trong đó: x_4 là biến dư ; y_1, y_2 là các biến giả tạo; y_3 là biến đệm. Vì biến dư xem như biến chính thức nên hàm mục tiêu (1.18) có thể viết:

$$Z = 4x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0.x_4 \tag{1.21}$$

Đưa phương trình (1.21) về dạng;

$$4x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0.x_4 - Z = 0 \tag{1.21a}$$

Căn cứ vào hệ phương trình (1.20) và phương trình (1.21a) thành lập bảng đơn hình (1.5a). Tiếp theo khử các biến giả tạo y_1 và y_2 như đã làm trong §3.2. Phần còn lại tiến hành như trong §3.1. Bảng đơn hình cuối cùng (1.5d) cho phương án tối ưu:

$$\max Z = 100 \text{ ứng với } x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 22$$

§3.4. Trường hợp cực tiểu hóa hàm mục tiêu

Trong phần trước, các bài toán tối ưu đã được giải theo phương pháp đơn hình với điều kiện *cực đại hóa* hàm mục tiêu.

Khi cần cực tiểu hóa hàm mục tiêu, ta nhân hai vế của hàm mục tiêu với (-1). Như vậy cực tiểu hóa hàm mục tiêu Z có nghĩa là cực đại hóa hàm mục tiêu Z' = -Z

Thí dụ 1.4

Cực tiểu hóa hàm

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \tag{1.22}$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 &\leq -1 \quad (a) \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \quad (b) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 5 \quad (c) \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Trước hết, ta nhân hai vế của phương trình (1.22) với (-1) để có hàm mục tiêu Z'=-Z. Vì ở vế phải của bất đẳng thức (1.23a) xuất hiện số âm (-1) nên phải nhân 2 vế của nó với (-1) để vế phải b_1 trở thành một số dương. Sau khi làm như vậy, bài toán tối ưu trở thành:

Cực đại hóa hàm $Z' = -Z = -2x_1 - 4x_2 - x_3$ (1.24)

với điều kiện

$$\begin{aligned} &-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \quad \text{(a)} \\ &2x_1 - x_2 + 2x_3 \quad = 2 \quad \text{(b)} \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \leq 5 \quad \text{(c)} \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Hệ điều kiện trên có 3 dạng khác nhau nên ta tiến hành tính toán như đã trình bày trong §3.3. Cuối cùng bài toán tối ưu có dạng:

Cực đại hóa hàm mục tiêu

$$Z' = -2x_1 - 4x_2 - x_3 + 0.x_4 \tag{1.26}$$

với điều kiện:

$$\begin{aligned} &-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 = 1 \quad \text{(a)} \\ &2x_1 - x_2 + 2x_3 + \qquad y_2 = 2 \quad \text{(b)} \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 + \qquad y_3 = 5 \quad \text{(c)} \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad y_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Trong đó: x_4 là biến dư; y_1, y_2 là các biến giả tạo; y_3 là biến đệm.

Ta thành lập các bảng đơn hình như đã trình bày trong §3.3.

Bảng đơn hình cuối cùng cho phương án tối ưu: max Z' = -1 hay min Z = 1 ứng với $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $y_3 = 6$.

§3.5. Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

Trong thực tế, có những bài toán quy hoạch tuyến tính đòi hỏi toàn bộ các biến là những số nguyên. Ta gọi bài toán đó là bài toán *quy hoạch tuyến tính nguyên*. Nó có dạng sau đây:

Cực tiểu hóa (hoặc cực đại hóa) hàm

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

với điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \{\leq \ = \ \geq\} \ b_i$$

$i = 1, 2, \ldots m$

$x_j \geq 0$, x_j là số nguyên, $j = 1, 2, \ldots n$

Trong đó: a_{ij}, b_i, c_j là các hằng số.

Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên có thể giải gần đúng bằng các phương pháp đã trình bày trong phần trước. Sau đó, làm tròn số để phương án tối ưu trở thành tập hợp các số

nguyên. Tuy nhiên, cách tính gần đúng này chỉ có thể thực hiện được khi phương án tối ưu bao gồm các giá trị đủ lớn. Nếu phương pháp tối ưu bao gồm một số giá trị bé (chẳng hạn <1), cách tính gần đúng này sẽ dẫn đến những sai số đáng kể.

R. E. Gomory là tác giả đề ra thuật toán tìm phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên. Thuật toán đó như sau:

Bước 1:

Tìm phương án tối ưu theo phương pháp đơn hình trình bày trong phần trước. Từ bảng đơn hình cuối cùng, dùng các biến tự do để biểu thị các biến cơ bản:

$$\chi_{Bi} = d_{i0} - \sum d_{ij}x_j \quad (1.28)$$

Trong đó:

x_{Bi}- biến cơ bản trong bảng đơn hình cuối cùng;

d_{i0}- số hạng tự do cùng hàng với x_{Bi};

d_{ij}- hệ số ứng với biến tự do, các hệ số này cùng hàng với x_{Bi};

x_j- biến tự do.

Dấu tổng Σ áp dụng cho các biến tự do trong bảng đơn hình cuối cùng.

Bước 2

Giả sử giá trị của biến cơ bản x_{Bi} là một số không nguyên (tức là d_{i0} không nguyên).Ta bổ sung thêm điều kiện

$$\sum t_{ij}x_j \geq t_{i0} \quad (1.29)$$

Trong đó:

t_{ij}- *phần phân số* của số d_{ij} trong phương trình (1.28);

t_{i0}- *phần phân số* của d_{i0} trong phương trình (1.28).

Theo định nghĩa của Gomory

$$t(a) = a - FN(a) \qquad t(a) \geq 0 \quad (1.30)$$

Trong đó:

t(a)- phần phân số của a;

FN(a)- *phần nguyên* của số a.

FN(a) phải là *số nguyên lớn nhất* thỏa mãn điều kiện FN(a) ≤ a.

Thí dụ:

FN(5) = 5, FN(0,3) = 0; FN(3/2) = 1;

FN(-5) = -5; FN(-0,3) = -1; FN(-4/3) = -2

Bước 3.

Bổ sung điều kiện ràng buộc (1.29) vào bảng đơn hình cuối cùng đã được thành lập trong bước 1. Xem bảng đó là bảng đơn hình đầu tiên để thành lập các bảng đơn hình tiếp theo. Nếu

lần này phương án tối ưu lại bao gồm giá trị không nguyên, ta tiếp tục thực hiện các bước 1, 2, 3 cho đến khi nào phương án tối ưu trở thành tập hợp các số nguyên.

Thí dụ 1.5

Cực đại hóa hàm

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \text{ (a)}$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \le 8 \quad \text{(b)} \\ &x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \text{(c)} \end{aligned} \qquad (1.31)$$

$$x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \text{ số nguyên}$$

Trước hết, ta giải theo phương pháp đồ thị để đối chiếu kết quả tính toán với thuật toán Gomory. Trên hình (1.2), miền OBDE biểu thị miền nghiệm. Phương án tối ưu xuất hiện tại điểm D:

$$x_1 = 3\frac{1}{3};\ x_2 = 1\frac{1}{3};\ \max Z = 12\frac{2}{3}$$

Trong miền nghiệm trên hình 1. 2 , các điểm ứng với phương án tối ưu nguyên được khoanh tròn. Có tất cả 13 điểm như vậy. Ta chú ý đến điểm F (lân cận với điểm D) tại đó $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $Z = 11$. Kết quả này trùng với kết quả khi lấy tròn số phương án tối ưu (ứng với điểm D). Ta lại chú ý thêm điểm E: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $Z = 12$. Kết quả này trùng với kết quả tính theo thuật toán Gomory.

Thuật toán Gomory tiến hành như sau:

Bước 1.

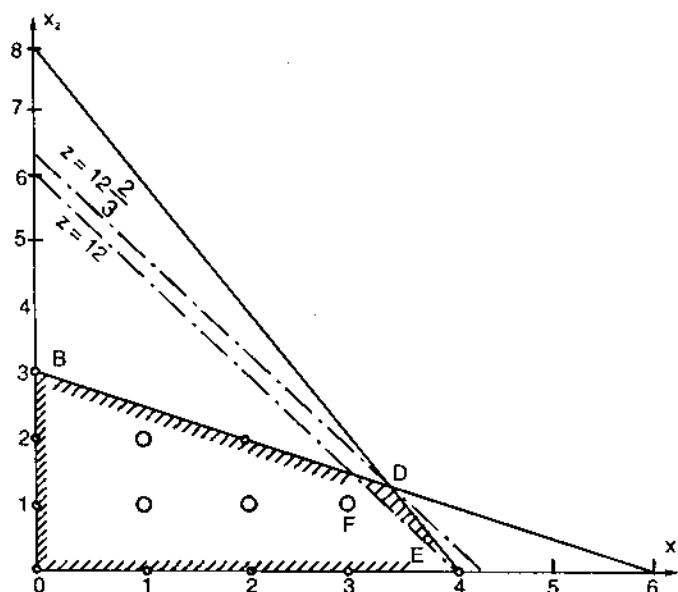
Thành lập các bảng đơn hình (1.6) cho bài toán tối ưu (1.31). Bảng đơn hình cuối cùng (1.6c) cho phương án tối ưu: max Z = 38/ 3 ứng với x_1 = 10/3 và x_2 = 4/3. Ta dùng các biến tự do y_1 và y_2 để biểu thị biến $x_{B2} = x_2$ (ứng với hàng thứ 3 trong bảng 1.6c):

$$x_2 = 4/3 - 1/3y_1 + 2/3y_2$$

Trong đó: $d_{20} = 4/3$; $d_{21} = -1/3$; $d_{22} = 2/3$

Bước 2.

Áp dụng công thức (1.29), bổ sung điều kiện ràng buộc sau đây vào bảng đơn hình (1/6c):



Hình 1.2

$t_{21}.y_1 + t_{22}.y_2 \geq t_{20}$ (1.32)

Trong đó:

t_{21}- phần phân số của số $d_{21} = -1/3$;

t_{22}- phần phân số của số $d_{22} = 2/3$;

t_{20}- phần phân số của số hạng tự do $d_{20} = 4/3$.

Áp dụng công thức (1.30):

$t_{21} = t(d_{21}) = t(-1/3) = -1/3-(-1) = 2/3$

$t_{22} = t(d_{22}) = t(2/3) = 2/3 - 0 = 2/3$

$t_{20} = t(d_{20}) = t(4/3) = 4/3 - 1 = 1/3$

Thay các giá trị trên vào điều kiện (1.32):

$2/3y_1 + 2/3y_2 \geq 1/3$ (1.32a)

Đưa bất đẳng thức (1.32a) về dạng đẳng thức bằng cách đưa vào biến giả tạo y_3 và biến dư x_3:

$2/3y_1 + 2/3y_2 - x_3 + y_3 = 1/3$ (1.32b)

Sau khi bổ sung thêm điều kiện (1.32b) vào bảng đơn hình (1.6c), ta được bảng đơn hình (1.7a). Bảng cuối cùng cho phương án tối ưu: max Z = 25/2 ứng với $x_1 = 7/2$ (chưa đạt yêu cầu) và $x_2 = 1$.

Ta lại tiếp tục các bước trên đây:

Bước 1:

Áp dụng công thức (1.28) cho ẩn cơ bản x_1 trong bảng (1.7b):

$x_1 = 7/2 - 1.y_1 - (-1/2x_3)$

Bước 2:

Bảng 1.6

(a)	x_1	x_2		
	(2)	1	8	y_1
	1	2	6	y_2
	3	2	0	-Z
(b)	y_1	x_2		
	1/2	1/2	4	x_1
	-1/2	(3/2)	2	y_2
	-3/2	1/2	-12	-Z
(c)	y_1	y_2		
	2/3	-1/3	10/3	x_1
	-1/3	2/3	4/3	x_2
	-4/3	-1/3	-38/3	-Z

Bảng 1.7

(a)	y_1	y_2	x_3		
	2/3	-1/3	0	10/3	x_1
	-1/3	2/3	0	4/3	x_2
	2/3	(2/3)	-1	1/3	y_3
	-4/3	-1/3	0	-38/3	-Z
(b)	y_1	y_3	x_3		
	1		-1/2	7/2	x_1
	-1		1	1	x_2
	1		-3/2	1/2	y_2
	-1		-1/2	-25/2	-Z

Tương tự như trên, sau khi áp dụng công thức (1.29), điều kiện ràng buộc bổ sung có dạng:

$$0.y_1 + 1/2x_3 \geq 1/2$$

Điều kiện này được bổ sung vào bảng đơn hình (1.8a). Tiếp tục lập bảng đơn hình (1.8b) như thường lệ. Cuối cùng, được phương án tối ưu: max Z = 12 ứng với $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Thí dụ 1.6.

Cực đại hóa hàm

$Z = 5x_1 = 4x_2 + x_3$ (a)

với điều kiện

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 4x_1 + x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13 \end{array}\right\} \text{(b)}$$

$x_1, x_2, x_3 \le 0$; x_1, x_2, x_3 số nguyên.

Để giải bài toán trên, ta chia làm 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1

Bước 1

Sau khi áp dụng phương pháp đơn hình, ta được bảng đơn hình cuối cùng (1.9). Phương án tối ưu là:

max Z = 19,4 ứng với $x_1 = 2,3$; $x_2 = 1,8$; $x_3 = 0,7$

(Không đạt yêu cầu).

Áp dụng công thức (1.28) cho ẩn cơ bản x_2 trong bảng đơn hình (1.9):

$x_2 = 1,8 - 0,4y_1 - (-0,2y_2) - 0.y_3$.

Bảng 1.8

(a)

y_1	x_3	x_4		
1	-1/2	0	7/2	x_1
-1	1	0	1	x_2
1	-3/2	0	1/2	y_2
0	1/2	0	1/2	y_4
-1	-1/2	0	-25/2	-Z

(b)

y_3	y_4	x_4		
1		-1	4	x_1
-1		2	0	x_2
1/2		-3	2	y_2
0		-2	1	x_3
-1		-1	-12	-Z

Bảng 1.9

y_1	y_2	y_3		
-0,1	0,3	0	2,3	x_1
0,4	-0,2	0	1,8	x_2
-0,9	-0,3	1	0,7	x_3
-0,2	0,4	-1	-19,4	-Z

Bước 2

Áp dụng công thức (1.29) để được điều kiện bổ sung:

$$0,4y_1 + 0,8y_2 + 0.y_3 \ge 0,8$$

Sau khi bổ sung điều kiện trên vào bảng (1.9), ta được bảng (1.10a). Tiếp tục lập bảng đơn hình (1.10b). Phương án tối ưu: max Z = 19 ứng với $x_1 = 2,5$ (không đạt yêu cầu). Ta chuyển sang giai đoạn 2.

Giai đoạn 2

Bước 1

Áp dụng công thức (1.28) cho ẩn cơ bản x_1 trong bảng (1.10b):

$$x_1 = 2,5 - 0,5y_2 - 0.y_3 - (-0,25)x_4$$

Bước 2

Áp dụng công thức (1.29) để được điều kiền ràng buộc bổ sung

$$0,5y_2 + 0.y_3 + 0,75x_4 \ge 0,5$$

Ta tiếp tục lập các bảng đơn hình tiếp theo. Kết quả cuối cùng cho phương án tối ưu:

max Z = 19 ứng với $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

Bảng 1.10

(a)

y_1	y_2	y_3	x_4		
-0,1	0,3	0	0	2,3	x_1
0,4	-0,2	0	0	1,8	x_2
-0,9	-0,3	1	0	0,7	x_3
0,4	0,8	0	-1	0,8	y_4
-0,2	-0,4	-1	0	-19,4	-Z

(b)

y_4	y_2	y_3	x_4		
	0,5	0	-0,25	2,5	x_1
	-1	0	1	1	x_2
	1,5	1	-2,25	2,5	x_3
	2	0	-2,5	2	y_1
	0	1	-2,4	-19	-Z

§3.6. Bài toán đối ngẫu

Ta hãy xét hai bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây:

Bài toán 1

Cực đại hóa hàm

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + \sum_{k=1}^{p} C_{n+k} X_{n+k} \quad (1.33)$$

với điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{p} a_{i,n+k} x_{n+k} \le b_i \quad (1.34)$$

$$i = 1,2,\ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+h,j} x_j + \sum_{k=1}^{p} a_{m+h,n+k} x_{n+k} = b_{m+h} \quad (1.35)$$

$$h = 1, 2, \ldots, q$$

Trong đó: $x_1, x_2, \ldots x_n$ là n biến *không âm*; $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+p}$ là p biến tự do (biến âm). Bất đẳng thức (1.34) biểu thị m điều kiện ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức. Biểu thức (1.35) biểu thị q điều kiện ràng buộc dưới dạng đẳng thức. Tất cả các số a, b, c đều là hằng số. Khi bài toán trên đây không bao gồm các biến tự do và các điều kiện ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức, ta gọi nó là bài toán quy hoạch tuyến tính *có dạng chính tắc*.

Bài toán 2

Cực tiểu hóa hàm

$$Z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{h=1}^{q} b_{m+h} y_{m+h} \quad (1.36)$$

với điều kiện

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + \sum_{h=1}^{q} a_{j,m+h} y_{m+h} \ge c_j \quad (1.37)$$

$$j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{n+k,i} y_i + \sum_{h=1}^{q} a_{n+k,m+h} y_{m+h} = C_{n+k} \quad (1.38)$$

$$k = 1,2,\ldots,p$$

Trong đó: y_1, y_2,... y_m là biến không âm; y_{m+1}, y_{m+2},..., y_{m+q} là q biến tự do.

Hệ bất đẳng thức (1.37) biểu thị n điều kiện ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức. Hệ đẳng thức (1.38) biểu thị p điều kiện ràng buộc dưới dạng đẳng thức.

Hai bài toán trên đây có mối quan hệ tương ứng mật thiết với nhau. Chẳng hạn n biến không âm trong bài toán 1 tương ứng với n điều kiện ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức (1.37) trong bài toán2; p biến tự do trong bài toán 1 tương ứng với p điều kiện ràng buộc dưới dạng đẳng thức (1.38) trong bài toán 2; m điều kiện dưới dạng bất đẳng thức (1.34) trong bài toán 1 tương ứng với m biến không âm trong bài toán 2; q điều kiện dưới dạng đẳng thức (1.35) trong bài toán 1 tương ứng với q biến tự do trong bài toán 2.

Ta gọi bài toán 1 là *bài toán gốc*, bài toán 2 là *bài toán đối ngẫu.*

Căn cứ vào định lí đối ngẫu, ta có các tính chất quan trọng sau đây:

Tính chất 1:

Bài toán 1 và bài toán 2 là 2 bài toán đối ngẫu nhau. Nghĩa là: nếu lấy bài toán 1 làm bài toán gốc thì bài toán 2 là bài toán đối ngẫu; ngược lại, nếu lấy bài toán 2 làm bài toán gốc thì bài toán 1 là bài toán đối ngẫu.

Tính chất 2

Nếu bài toán gốc có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu.

Tính chất 3

Giá trị cực đại của hàm mục tiêu trong bài toán gốc bằng giá trị cực tiểu của hàm mục tiêu trong bài toán đối ngẫu. Ngược lại, giá trị cực tiểu của hàm mục tiêu trong bài toán gốc bằng giá trị cực đại của hàm mục tiêu trong bài toán đối ngẫu.

Nếu gọi Z là hàm mục tiêu trong bài toán gốc, Z* là hàm mục tiêu trong bài toán đối ngẫu, ta có hệ thức:

$$\max Z = \min Z^*$$
$$\min Z = \max Z^* \qquad (1,39)$$

Trong thực tế, có trường hợp bài toán gốc khó giải hơn bài toán đối ngẫu. Khi đó, giải bài toán đối ngẫu sẽ thuận lợi hơn.

Thí dụ 1.7.

Cực đại hóa hàm $Z = 7x_1 + 5x_2$ (1.40)

với điều kiện:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 0x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 0x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (1.41)$$

Ta thành lập bài toán đối ngẫu như sau. Trong bài toán gốc, có hai biến không âm, không có biến tự do. Có 4 điều kiện ràng buộc mang dấu bất đẳng thức ≤, không có điều kiện ràng buộc mang dấu đẳng thức. Đồng thời, hàm mục tiêu được cực đại hoá.

Vậy bài toán đối ngẫu bao gồm 4 biến không âm và 2 điều kiện mang dấu ≥. Đồng thời hàm Z* được cực đại hoá. Do đó bài toán đối ngẫu có dạng:

Cực tiểu hóa hàm

$$Z^* = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \quad (1.42)$$

với điều kiện

$$\left.\begin{aligned} &2y_1 + 2y_2 + 0.y_3 + 3y_4 \geq 7 \ \ (a) \\ &3y_1 + 1.y_2 + 3y_3 + 0.y_4 \geq 5 \ \ (b) \end{aligned}\right\} \quad (1.43)$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Các hệ số trong (1.42) lần lượt là các số hạng trong vế phải của (1.41). Các hệ số trong (1.43a) lần lượt là các hệ số của x_1 trong (1.41); các hệ số trong (1.43b) lần lượt là các hệ số của x_2 trong (1.41).

Căn cứ vào nhận xét trình bày trong phần trước, ta cực đại hóa hàm Z'*= (-Z*)

Sau khi đưa vào các biến dư y_5, y_6 và biến giả tạo u_1, u_2, bài toán đối ngẫu trên có dạng

Cực đại hóa hàm

$$Z'^* = -19y_1 - 13y_2 - 15y_3 - 18y_4 + 0.y_5 + 0.y_6 \quad (1.42a)$$

với điều kiện

$$\left.\begin{aligned} &2y_1 + 2y_2 + 3y_4 - y_5 + u_1 = 7 \\ &3y_1 + 1.y_2 + 3y_3 - y_6 + u_2 = 5 \end{aligned}\right\} \quad (1.43a)$$

Sau khi giải theo phương pháp đơn hình (xem bảng (1.11)) ta được phương án tối ưu:

max Z*' = 50 ứng với $y_1 = 3/4$, $y_2 = 11/4$, $y_3 = y_4 = 0$

(xem bảng (1.11e))

Vậy min Z* = 50 hay max Z = 50

Một điều lí thú là nếu toàn bộ các biến trong cả hai bài toán đều không âm thì các bảng đơn hình trong bài toán gốc có thể suy ra từ các bảng đơn hình tương ứng trong bài toán đối ngẫu. Ta sẽ vận dụng một số tính chất sau đây:

1) Bảng đơn hình của bài toán gốc có thể suy ra từ bảng đơn hình tương ứng của bài toán đối ngẫu bằng cách hoán vị hàng và cột. Sau khi hoán vị hàng và cột, cần phải đổi dấu toàn bộ các phần tử tương ứng trong cột và hàng.

2) Giữa các biến trong 2 bài toán, có mối quan hệ tương ứng sau đây.

Lấy thí dụ bài toán đã cho. Đưa hệ điều kiện (1.41) của bài toán gốc về dạng đẳng thức:

Bảng 1.11

a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6		
	2	2	0	③	-1	0	7	u_1
	3	1	3	0	0	-1	5	u_2
	-19	-13	-15	-18	0	0	0	-Z*'
b	y_1	y_2	y_3	u_1	y_5	y_6		
	2/3	2/3	0		-1/3	0	7/3	y_4
	3	1	③		0	-1	5	u_2
	-7	-1	-15		-6	0	42	-Z*'
c	y_1	y_2	u_2		y_5	y_6		
	2/3	2/3			-1/3	0	7/3	y_4
	①	1/3			0	-1/3	5/3	y_3
	8	4			-6	-5	67	-Z*'
d	y_3	y_2			y_5	y_6		
	-2/3	(4/9)			-1/3	2/9	11/9	y_4
	1	1/3			0	-1/3	5/3	y_1
	-8	4/3			-6	-7/3	161/3	-Z*'
e	y_3	y_4			y_5	y_6		
	-3/2	9/4			-3/4	1/2	11/4	y_2
	3/2	-3/4			1/4	-1/2	3/4	y_1
	-6	-3			-5	-3	-50	-Z*'

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 19 - 2x_1 - 3x_2 \\ z_{2-} &= 13 - 2x_1 - 1.x_2 \\ z_3 &= 15 - 0.x_1 - 3x_2 \\ z_4 &= 18 - 3x_1 - 0.x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.44a)$$

Trong đó:

z_1, z_2, z_3, z_4 là các biến đệm đóng vai trò ẩn cơ bản;

x_1, x_2 đóng vai trò ẩn tự do. Ở đây, không đưa vào các biến giả tạo vì đằng nào cũng phải khử chúng.

Bằng cách tương tự, điều kiện (1.43a) của bài toán đối ngẫu có thể đưa về dạng:

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= -7 + 2y_1 + 2y_2 + 0.y_3 + 3y_4 \\ y_6 &= -5 + 3y_1 + 1.y_2 + 3y_3 + 0.y_4 \end{aligned}\right\} \qquad (1.44b)$$

Trong đó, các biến dư y_5, y_6 đóng vai trò ẩn cơ bản và các biến y_1, y_2, y_3, y_4 đóng vai trò ẩn tự do. Mối quan hệ tương ứng giữa các biến trong 2 bài toán biểu thị theo sơ đồ sau đây:

	biến tự do				biến cơ bản		
Bài toán đối ngẫu:	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	(1.45)
Bài toán gốc :	z_1	z_2	z_3	z_4	x_1	x_2	
	biến cơ bản				biến tự do		

Sau khi hoán vị hàng và cột, ta hoán vị các biến theo sơ đồ (1.45). Cuối cùng, ta được các bảng đơn hình (1.12c), (1.12d), (1.12e) của bài toán gốc. Chúng lần lượt tương ứng với các bảng đơn hình (1.11c), (1.11d), (1.11e) của bài toán đối ngẫu.

Bảng đơn hình cuối cùng (1.12e) cho phương án tối ưu của bài toán gốc:

max Z = 50 ứng với $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.

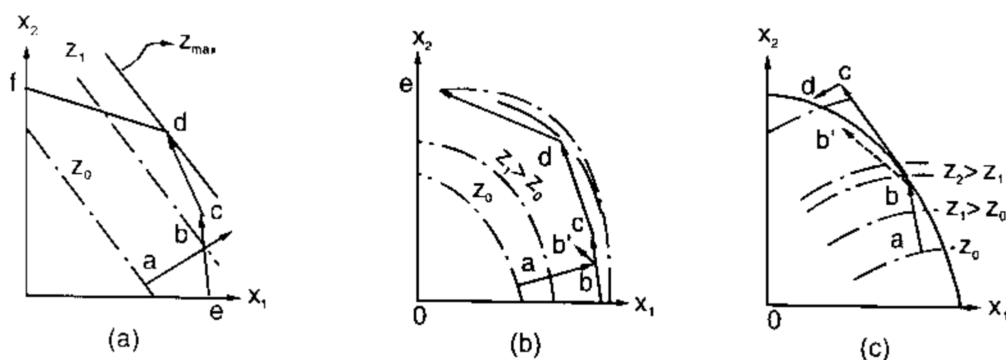
§4. PHƯƠNG PHÁP GRAĐIÊN

Phương pháp đơn hình là một công cụ tính toán cơ bản để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính khi các biến là liên tục hoặc số nguyên. Song còn có những phương pháp khác có khả năng giải được bài toán tối ưu tuyến tính hoặc phi tuyến tính mà không dùng đến kĩ thuật đơn hình. Một trong những phương pháp đó là phương pháp Građiên.

Ta đã biết rằng một phương án là một tập hợp các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn các điều kiện ràng buộc. Nó tương ứng với một điểm trong miền nghiệm thuộc không gian n chiều. Thực chất của phương pháp Građiên là xuất phát từ một điểm này đi đến một điểm khác trong miền nghiệm trên những hướng có lợi nhất sao cho phương án xấp xỉ dần dần và nhanh nhất với phương án tối ưu. Ta hãy minh họa vấn đề này trên hình 1.3.

Bảng 1.12.

(a)	z_4	z_3		
	-2/3	-1	-8	z_1
	-2/3	-1/3	-4	z_2
	1/3	0	6	x_1
	0	1/3	5	x_2
	-7/3	-5/3	-67	-Z
(b)	z_4	z_1		
	2/3	-1	8	z_3
	-4/9	-1/3	-4/2	z_2
	1/3	0	6	x_1
	-2/9	1/3	7/3	x_2
	-11/9	-5/3	-16/3	-Z
(c)	z_2	z_1		
	3/2	-3/2	6	z_3
	-9/4	3/4	3	z_4
	3/4	-1/4	5	x_1
	-1/2	1/2	3	x_2
	-11/4	-3/4	-50	-Z



Hình 1.3

Trên hình (1.3a), các đường mức ứng với các giá trị khác nhau của hàm mục tiêu Z (dạng tuyến tính). Các đường biên ec, cd, df biểu thị các điều kiện ràng buộc tới hạn* có dạng tuyến tính.

Giả sử đầu tiên ta xuất phát từ điểm a nằm trong miền nghiệm. Ta sẽ di chuyển theo hướng có lợi nhất là hướng véctơ gradiên vuông góc với đường mức Z_0 vì trên hướng đó, giá trị của hàm mục tiêu tăng nhanh nhất. Theo hướng đó, ta di chuyển đến điểm b nằm trên đường biên của miền nghiệm. Nếu từ điểm b, ta lại tiếp tục di chuyển theo hướng véctơ gradiên thì giá trị của hàm mục tiêu sẽ tăng nhanh nhất, nhưng điểm mới lại vượt ra ngoài miền nghiệm. Do đó, ta phải đổi hướng di chuyển. Trên hình (1.3a) ta di chuyển men theo các đường biên là tốt nhất: từ b di chuyển đến c, rồi từ c di chuyển đến d. Đây là điểm cuối cùng ứng với phương án tối ưu.

Khi hàm mục tiêu có dạng phi tuyến và các điều kiện ràng buộc có dạng tuyến tính, ta cũng làm tương tự như trên. Chẳng hạn, trên hình (1.3b), ta xuất phát từ điểm a, di chuyển đến điểm b nằm trên đường biên theo hướng véctơ gradiên của hàm mục tiêu. Từ điểm b, men theo đường biên di chuyển đến điểm c rồi từ điểm c di chuyển đến điểm d.

Khi các điều kiện ràng buộc có dạng phi tuyến (hình 1.3c), ta cũng xuất phát từ một điểm bất kỳ a nằm trong miền nghiệm, men theo hướng véctơ gradiên của hàm mục tiêu để di chuyển đến điểm b nằm trên đường biên. Vì các điều kiện ràng buộc ở đây có dạng phi tuyến, từ điểm b ta chọn một hướng di chuyển thích hợp chẳng hạn hướng bb' trên hình (1.3c) sao cho điểm mới vẫn nằm trong miền nghiệm. Bài toán này phức tạp hơn, ta sẽ đề cập đến trong phần sau.

Cần chú ý rằng đối với bài toán quy hoạch tuyến tính, giải theo phương pháp gradiên bao giờ cũng tồn tại một phương án tối ưu. Tuy nhiên, khi bài toán quy hoạch phi tuyến không thỏa mãn tính lồi, phương pháp gradiên chỉ cho phương án tối ưu cục bộ.

Sau đây ta sẽ nghiên cứu phương pháp gradiên trong 2 trường hợp.

---

* Khi một điều kiện dưới dạng bất đẳng thức trở thành đẳng thức ta gọi nó là *điều kiện tới hạn.*

§4.1. Trường hợp hàm mục tiêu có dạng tuyến tính hoặc phi tuyến, các điều kiện ràng buộc có dạng tuyến tính.

Giả sử có bài toán tối ưu:

Cực đại hóa hàm $Z = f(x_1, x_2,..., x_n)$ (1.46)

với điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\geq \ = \ \leq\} b_i$$
$$i = 1,2,...m \quad (1.47)$$
$$x_j \geq 0\ ; \qquad j = 1,2,...n$$

Khi hàm Z có dạng *tuyến tính*, phương trình (1.46) có dạng:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \quad (1.46a)$$

Điều kiện (1.47) vừa mang dấu đẳng thức, vừa mang dấu bất đẳng thức. Khi điều kiện ràng buộc mang dấu bất đẳng thức ≥, ta nhân 2 vế của nó với số (-1) để được một bất đẳng thức mang dấu ≤. Vì vậy, sau đây ta chỉ xét trường hợp bất đẳng thức mang dấu ≤.

Giả sử véctơ cột $\{x_o\} = \{x_{1,0}, x_{2,0}... x_{n,0}\}$ biểu thị một phương án nào đó nằm trong miền nghiệm ứng với giá trị Z_o của hàm mục tiêu. Véctơ cột $\{x_1\} = \{x_{1,1}, x_{2,1}... x_{n,1}\}$ biểu thị một phương án mới tốt hơn ứng với giá trị Z_1 của hàm mục tiêu nghĩa là $Z_1 > Z_o$.Giả sử hàm mục tiêu có đạo hàm riêng bậc nhất liên tục tại mọi điểm trong miền nghiệm.

Để giá trị của hàm mục tiêu tăng nhanh nhất từ điểm x_o ta men theo hướng véctơ grđiên của hàm mục tiêu. Phương án mới tốt hơn sẽ là:

$$x_1 = x_o + \lambda d_o \quad (1.48)$$

Trong đó:

λ - một hằng số dương gọi là độ dài của bước;

$\{d_o\}$- véctơ chuyển vị của véctơ gradiên ứng với hàm mục tiêu tại điểm x_o.

Véctơ gradiên của hàm mục tiêu có dạng

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ .... \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \quad 1.49)$$

Theo định nghĩa trên đây, véctơ cột

$$\{d_o\} = \nabla' f(x) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ .... \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}_{\{x\}=\{x_o\}} \quad (1.50)$$

Phương trình (1.48) tồn tại với giả thiết $\nabla f(x_o) \neq 0$. Khi hàm mục tiêu có dạng tuyến tính, từ phương trình (1.46a) ta có:

$$\nabla f(x) = \left[c_1 c_2 ... c_n\right] \tag{1.49a}$$

do đó

$$\{d_o\} = \{c_1\ c_2 ...\ c_n\} \tag{1.50a}$$

Ta nhận thấy khi giá trị λ càng lớn, giá trị hàm mục tiêu tăng càng nhanh. Vấn đề đặt ra là khống chế giá trị λ như thế nào để có lợi nhất. Nó phụ thuộc vào 2 nhân tố sau đây:

1) Khi tăng λ, một số biến có khả năng triệt tiêu. Để đảm bảo biến mới $x_{j,1}$ (tại điểm x_1) không âm, điều kiện sau đây phải được thỏa mãn:

$$x_{j,1} = x_{j,o} + \lambda d_{j,o} \geq 0$$

từ đó suy ra

$$\lambda \leq -\frac{x_{j,o}}{d_{j,o}} \text{ nếu } d_{j,o} < 0$$

Do đó, giá trị λ phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{aligned} &\lambda \leq \lambda_1 = \min_j \left[-x_{j,o} / d_{j,o}\right] \\ &x_{j,o} > 0 \ ; \ d_{j,o} < 0 \end{aligned} \tag{1.51}$$

2) Khi tăng λ, điểm mới có thể vượt ra khỏi miền nghiệm.

Để đảm bảo điểm mới không vượt ra khỏi miền nghiệm, ta phải có:

$$\left[a^i\right].\{x_1\} = \left[a^i\right].\left(\{x_o\} + \lambda\{d_o\}\right) \leq b_i$$

Trong đó: $[a^i]$ là hàng thứ i của ma trận các hệ số a_{ij} (ứng với x_j) trong hệ thức (1.47). Nếu

$$\left[a^i\right].\{d_o\} > 0 \rightarrow \lambda \leq \frac{b_i - \left[a^i\right]\{x_o\}}{\left[a^i\right]\{d_o\}}$$

do đó λ phải thỏa mãn điều kiện

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \leq \lambda_2 = \min_i \left[\left(b_i - \left[a^i\right]\{x_o\}\right) / \left[a^i\right]\{d_o\}\right] \\ &\qquad \left[a^i\right]\{d_o\} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.52}$$

Trong đó, chỉ số i ứng với điều kiện ràng buộc thứ i.

Vì những lí do trên đây, giá trị λ phải lấy bằng giá trị bé nhất trong 2 giá trị λ_1 và λ_2 vừa tính ở trên.

Khi một điểm mới có khả năng vượt ra ngoài miền nghiệm, ta không thể tiếp tục di chuyển theo hướng vectơ gradiên của hàm mục tiêu, mà phải di chuyển theo một hướng vectơ khác, chẳng hạn vectơ đơn vị $\{r\}$. Giả sử x_i là một điểm nằm trên đường biên ứng với điều kiện ràng buộc tới hạn thứ i. Ta kí hiệu điểm đó là x_v. Nếu từ điểm x_v, ta di chuyển theo hướng vectơ $\{r\}$, số gia của hàm mục tiêu sẽ là $\nabla f(x_v).\{r\}$. Tại điểm x_v có khả năng một số biến triệt tiêu, chẳng hạn biến $x_{j,v} = 0$. Để biến x_j không âm, phải thỏa mãn điều kiện:

$$x_j = x_{j,v} + \lambda.\ r_j \geq 0$$

nhưng vì

$$x_{j,v} = 0 \text{ và } \lambda > 0 \text{ nên } r_j \geq 0 \qquad \text{(a)}$$

Mặt khác, để bảo đảm điểm mới không vượt ra khỏi miền nghiệm, ta phải có:

Ứng với điều kiện ràng buộc tới hạn:

$$[a^i]\ .\ \{x\} = [a^i]\ .\ (\{x_v\} + 1\ \{r\}) \leq\ b_i$$

nhưng vì điểm x_v nằm trên đường biên nên $[a^i]\ .\ \{x_v\} = b_i$

do đó $\qquad \lambda[a^i]\ .\ \{r\} \leq 0$

vì $\lambda > 0$ nên $\qquad [a^i]\ .\ \{r\} \leq 0 \qquad$ (b)

Ứng với điều kiện ràng buộc mang dấu đẳng thức:

$$[a^i]\ .\ \{x\} = [a^i]\ .\ (\{x_j\} + \lambda\ \{r\}) = b_j$$

nhưng

$$[a^j].\ \{x_v\} = b_j \ (x_v \text{ nằm trên đường biên) nên } \lambda\ [a^j]\ .\{r\} = 0$$

Vì : $\qquad \lambda > 0$ nên $[a^j]\ .\{r\} = 0 \qquad$ (c)

Hướng di chuyển có lợi nhất là hướng vừa bảo đảm giá trị hàm mục tiêu tăng nhanh nhất, vừa thỏa mãn điều kiện biến không âm (điều kiện a), vừa thỏa mãn điều kiện điểm mới không vượt ra khỏi miền nghiệm (điều kiện b và c). Vậy để chọn hướng vectơ đơn vị $\{r\}$, ta giải bài toán quy hoạch phi tuyến:

Cực đại hóa hàm

$$\left.\begin{array}{ll} & Z_v = \nabla f(x_v).\ \{r\} \qquad\qquad \text{(a)} \\ \text{Với điều kiện} & \left\{\begin{array}{ll} [a^i]\ .\ \{r\} \leq 0 & \text{đối với điều kiện ràng buộc tới hạn} \\ [a^j]\ .\ \{r\} = 0\ ;\ j \neq i & \text{đối với điều kiện ràng buộc mang dấu đẳng thức} \\ r_j \geq 0 \text{ nếu } x_{j,v} = 0 & \\ [r]\ .\{r\} = 1 & \end{array}\right. \end{array}\right\} \qquad (1.53)$$

Để tránh sự phức tạp khi giải bài toán phi tuyến trên đây, ta chọn vectơ $\{r\}$ sao cho thỏa mãn $0 \leq r_j \leq 1$ khi $x_{j,v} = 0$ và $-1 \leq r_j \leq 1$ khi $x_{j,v} \neq 0$.

Vậy bài toán trên đây có dạng:

Cực đại hóa hàm:

$$Z_n = \nabla f(x_v).\{r\} \quad (a)$$

với điều kiện:

$[a^i].\{r\} \le 0$ đối với điều kiện ràng buộc tới hạn.

$[a^j].\{r\} = 0 \;\; j \ne i$ đối với điều kiện ràng buộc mang dấu đẳng thức

$0 \le r_j \le 1$ nếu $x_{j,v} = 0$

$-1 \le r_j \le 1$ nếu $x_{j,v} > 0$ (b)

(1.54)

Hướng vectơ xác định từ bài toán trên là hướng có lợi song chưa phải là tốt nhất. Vì vậy, sau khi xác định vectơ $\{r\}$, ta lại tiếp tục chọn độ dài bước λ theo các hệ thức (1.51). (1.52). Bằng cách trên đây, ta cải tiến dần các phương án. Quá trình tính toán sẽ kết thúc khi nào giá trị $\nabla f(x_o).\{r\}$ biến thành âm.

Khi các điều kiện ràng buộc có dạng tuyến tính, ta chọn vectơ $\{r\}$ sao cho hướng di chuyển là hướng men theo các đường biên của miền nghiệm.

Thí dụ 1.8.

Cực đại hóa hàm

$$Z = 2x_1 + x_2 \quad (a)$$

với điều kiện:

$$\left.\begin{array}{ll} 5x_1 + x_2 & \le 30 \\ 3x_1 + x_2 & \le 20 \\ 1,5x_1 + x_2 & \le 14 \\ x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}\right\} (b) \qquad (1.55)$$

Trên hình (1.4), các đường ec, cd, df biểu thị các đường biên ứng với các điều kiện tới hạn (1.55b). Giả sử xuất phát từ điểm a (1,2). Phương án đầu tiên là $\{x_o\} = \{1 \;\; 2\}$

Căn cứ vào phương trình (1.55a) và công thức (1.49):

$$\partial z / \partial x_1 = 2, \; \partial z / \partial x_2 = 1$$

do đó vectơ gradiên $\nabla f(x) = [2 \;\; 1]$.

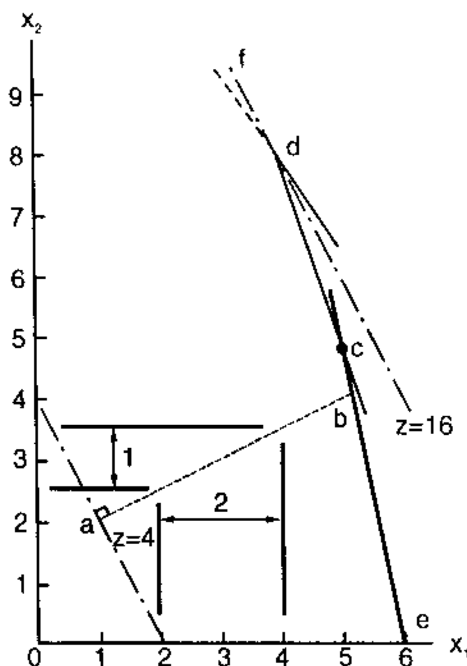
Từ công thức (1.50a):

$$\{d_o\} = \{d_{10} \;\; d_{20}\} = \{2 \;\; 1\}$$

Đường ab trên hình (1.4) biểu thị vectơ $\{d_o\}$, độ dốc tương ứng bằng 1/2. Từ phương trình (1.48), ta có điểm mới x_1:

$$\{x_1\} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.56)$$

Vì các phần tử của vectơ d_o là những số dương nên không cần xét đến điều kiện (1.51). Hệ điều kiện (1.55b) có thể viết dưới dạng ma trận:



Hình 1.4

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$$

hay: $\mathbf{A}.x \le \mathbf{b}$

Ứng với hàng đầu của ma trận **A** (i =1):

$[\mathbf{a}^1] = [5 \ \ 1]$; $b_1 = 30$

$b_1 - [\mathbf{a}^1]\{\mathbf{x}_o\} = 30 - [5 \ \ 1] . \{1 \ \ 2\} = 23$

$[\mathbf{a}^1]\{\mathbf{d}_o\} = [5 \ \ 1] . \{2 \ \ 1\} = 11 > 0$

Thay các giá trị này vào điều kiện (1.52) ta được $\lambda_{2,1} = 23/11$.

Ứng với hàng 2 của ma trận **A** (i = 2):

$[\mathbf{a}^2] = [3 \ \ 1]$; $b_2 = 20$

$b_2 - [\mathbf{a}^2] . \{\mathbf{x}_o\} = 20 - [3 \ \ 1] . \{1 \ \ 2\} = 15$

$[\mathbf{a}^2]\{\mathbf{d}_0\} = [3 \ \ 1] . \{2 \ \ 1\} = 7 > 0$

do đó $\lambda_{2,2} = 15/7$

Ứng với hàng thứ 3 của ma trận **A** (i=3):

$[\mathbf{a}^3] = [1,5 \ \ 1]$; $b_3 = 14$

$b_3 - [\mathbf{a}^3]\{\mathbf{x}_o\} = 14 - [1,5 \ \ 1] . \{1 \ \ 2\} = 11,5$

$[\mathbf{a}^3]\{\mathbf{d}_o\} = [1,5 \ \ 1] . \{2 \ \ 1\} = 4 > 0$

do đó $\lambda_{2,3} = 11,5/4$

Căn cứ vào điều kiện (1.52), ta chọn

$$\lambda = \lambda_2 = 23/11 = \min\begin{pmatrix} 23/11 \\ 15/7 \\ 11,5/4 \end{pmatrix}$$

Thay giá trị λ vào phương trình (1.56); ta có điểm mới

$$\{x_1\} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 23/11\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57/11 \\ 45/11 \end{pmatrix}$$

Điểm $\{x_1\}$ ứng với điểm b trên hình (1.4). Như vậy là sau khi xác định độ dài bước λ, ta di chuyển từ điểm a đến điểm b. Điểm mới này nằm trên đường biên ứng với điều kiện ràng buộc tới hạn thứ nhất. Đến đây, ta tiếp tục di chuyển theo hướng vectơ $\{r\}$. Ta có:

$$\nabla f(x_v) . \{r\} = \nabla f(x_1) . \{r\} = [2 \ \ 1] . \{r_1 \ \ r_2\} = 2r_1 + r_2 \qquad (a)$$

Ta xác định các thành phần của vectơ {r} theo các hệ thức (1.54b). Ứng với điều kiện tới hạn thứ nhất (i=1):

$$[a^1] \{r\} = [5 \ \ 1] . \{r_1 \ \ r_2\} = 5r_1 + r_2 \qquad (b)$$

Thay các biểu thức (a) và (b) vào bài toán (1.54) ta có bài toán tối ưu:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Cực đại hóa hàm} & Z_v = 2r_1 + r_2 \quad (a) \\ \text{với điều kiện:} & \left.\begin{array}{l} 5r_1 + r_2 \le 0 \\ -1 \le r_1 \le 1 \\ -1 \le r_2 \le 1 \end{array}\right\} (b) \end{array}\right\} \qquad (1.57)$$

Phương án tối ưu của bài toán trên đây là:

$$\{r_1 \ \ r_2\} = \{-1/5 \ \ \ 1\}$$

Vậy từ điểm X_v, ta di chuyển theo hướng vectơ $\{d_v\} = \{-1/5 \ \ 1\}$. Trên hình (1.4) ta nhận thấy đoạn eb có độ dốc bằng -5/1 do đó vectơ d_v trùng với đường biên ứng với điều kiện tới hạn thứ nhất. Sau khi xác định vectơ {r}, ta thay $\{x_2\}$ vào $\{x_1\}$, $\{x_1\}$ vào $\{x_o\}$, $\{d_v\}$ vào $\{d_o\}$ và áp dụng công thức (1.48):

$$\{x_2\} = \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57/11 \\ 45/11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.58)$$

Vì $x_{1,1} = 57/11 > 0$ và $d_{1,1} = -1/5 < 0$

nên phải xét đến điều kiện (1.51):

$$\lambda_1 = (-57/11) : (-1/5) = 285/11$$

Ứng với điều kiện tới hạn thứ nhất, không cần tính $\lambda_{2,1}$ vì vectơ $\{d_v\}$ trùng với đường biên ứng với điều kiện tới hạn đó.

Ứng với điều kiện tới hạn thứ 2 xem hệ bất đẳng thức (1.55b):

$$\mathbf{b}_2 - [\mathbf{a}^2] . \{\mathbf{x}_1\} = 20 - [3 \ \ 1] . \{57/11 \ \ \ 45/11\} = 4/11$$

$$[\mathbf{a}^2] . \{\mathbf{d}_1\} = [3 \ \ 1] . \{-1/5 \ \ \ 1\} = 2/5 > 0$$

do đó:

$$\lambda_{2,2} = \frac{4/11}{2/5} = 10/11$$

Bằng cách tương tự, ứng với điều kiện tới hạn thứ 3, $\lambda_{2,3} = 67, 173/11$. Căn cứ vào điều kiện (1.52) ta chọn $\lambda_2 = \lambda_{2,2} = 10/11$.

Chọn giá trị λ bằng giá trị nhỏ nhất trong 2 giá trị λ_1 và λ_2 vừa tính ở trên: $\lambda = 10/11$. Thay giá trị λ vào phương trình (1.58):

$$\{x_2\} = \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57/11 \\ 45/11 \end{pmatrix} + 10/11. \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Điểm x_2 trùng với điểm C trên hình (1.4). Đây là điểm giao nhau giữa đường biên ứng với điều kiện tới hạn thứ nhất và đường biên ứng với điều kiện tới hạn thứ 2.

Đến đây, ta tiếp tục di chuyển men theo đường biên ứng với điều kiện tới hạn thứ 2. Vì độ dốc của nó là -3/1 nên ta chọn vectơ $\{\mathbf{r}\} = \{r_1 \ \ r_2\} = \{-1/3 \ \ 1\}$. Bằng phương pháp tương tự trình bày ở trên, ta được điểm mới.

$$\{x_3\} = \begin{pmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Điểm này trùng với điểm d trên hình (1.4) và cho phương án tối ưu.

Bây giờ ta hãy thử xác định vectơ $\{\mathbf{r}\}$ bằng cách giải bài toán phi tuyến (1.53). Lợi dụng kết quả của bài toán (1.57), ta có bài toán tối ưu:

Cực đại hóa hàm

$$Z_v = 2r_1 + r_2$$

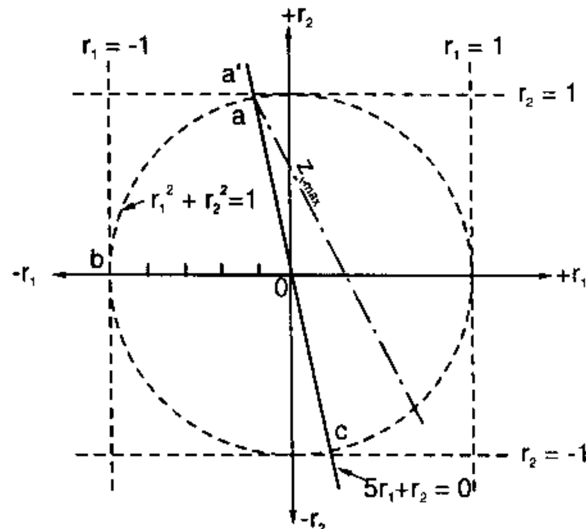
Với điều kiện:

$$\left.\begin{array}{ll} 5r_1 + r_2 \le 0 & \text{(a)} \\ [\mathbf{r}].\{\mathbf{r}\} = r_1^2 + r_2^2 = 1 & \text{(b)} \end{array}\right\} \qquad (1.59)$$

Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (1.5).

Đường ac ứng với điều kiện tới hạn (1.59a). Đường tròn biểu thị điều kiện phi tuyến (1.59b). Miền nghiệm giới hạn bởi đoạn thẳng ac và cung tròn abc. Giá trị cực đại của hàm mục tiêu ứng với điểm a (giao điểm giữa đường thẳng $5r_1 + r_2 = 0$ và đường tròn). Tại đó, $r_1 = -1/\sqrt{26}$, $r_2 = 5\sqrt{26}$. Độ dốc của đoạn ac bằng -5 do đó, phương của vectơ $\{d_v\}$ trong bài toán trước trùng với phương của đường ac.

Kết quả giải bài toán (1.57) cũng ghi trên (hình 1.5). Lúc này, miền nghiệm xác định bởi đường thẳng ac và các cạnh hình vuông về phía bên trái đường ac. Điểm a' ứng với giá trị cực đại của hàm mục tiêu. Nó là giao điểm của đường thẳng $5r_1 + r_2 = 0$ và đường $r_2 = 1$. Tại đó, $r_1 = -1/5$, $r_2 = 1$. Điều này chứng tỏ phương của vectơ $\{\mathbf{r}\}$ trong bài toán tuyến tính (1.57) hoàn toàn trùng với phương của vectơ $\{\mathbf{r}\}$ trong bài toán phi tuyến (1.59).



Hình 1.5

§4.2. Trường hợp hàm mục tiêu có dạng phi tuyến, các điều kiện ràng buộc mang dấu ≤ có dạng phi tuyến, các điều kiện ràng buộc mang dấu đẳng thức có dạng tuyến tính

Giả sử có bài toán

Cực đại hóa hàm

$$\left.\begin{aligned} & Z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) && \text{(a)} \\ \text{Với điều kiện:} \quad & \\ & g_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \le b_i && \text{(b)} \\ & \Phi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = d_k && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \qquad (1.60)$$

Trong đó: hàm Z có dạng phi tuyến; điều kiện (1.60b) có dạng phi tuyến; điều kiện (1.60c) có dạng tuyến tính. Ta gọi (1.60b) là điều kiện ràng buộc loại 1 và (1.60c) là điều kiện ràng buộc loại 2.

Để giải bài toán trên đây, ta cũng xuất phát từ một điểm x_o trong miền nghiệm và di chuyển theo hướng vectơ građiên của hàm mục tiêu. Điểm mới xác định từ phương trình (1.48) trong đó giá trị λ lấy bằng giá trị nhỏ nhất trong 2 giá trị λ_1 và λ_2. λ_1 xác định theo điều kiện (1.51). Để xác định λ_2, ta giải phương trình:

$$g_i(x_1) = b_i \qquad (1.61)$$

Trong đó, chỉ số i ứng với điều kiện ràng buộc tới hạn loại 1 thứ i, x_1 là một điểm mới.

Zoutendijk đề ra một phương pháp xác định vectơ $\{\mathbf{r}\}$, vừa bảo đảm điểm mới nằm trong miền nghiệm, vừa bảo đảm tăng nhanh giá trị hàm mục tiêu. Theo phương pháp này, ta xuất phát từ một điểm x_v nằm trên đường biên. Ta sẽ xác định vectơ $\{\mathbf{r}\}$ bằng cách giải bài toán quy hoạch:

Cực đại hóa hàm

$$Z = \sigma$$

với điều kiện

$$\left.\begin{aligned} \nabla g_i(\mathbf{x}_v).\{\mathbf{r}\} + \sigma \le 0 && \text{(a)} \\ \left[\mathbf{a}^i\right].\{\mathbf{r}\} \le 0 && \text{(b)} \\ \left[\mathbf{a}^j\right].\{\mathbf{r}\} = 0 && \text{(c)} \\ \nabla f(\mathbf{x}_v).\{\mathbf{r}\} + \sigma \le 0 && \text{(d)} \\ \{\mathbf{r}\}.\{\mathbf{r}\} = 1 && \text{(e)} \end{aligned}\right\} \qquad (1.62)$$

Trong đó, chỉ số i ứng với điều kiện tới hạn loại 1, chỉ số j ứng với điều kiện ràng buộc loại 2. Ẩn của bài toán trên đây là σ và các phần tử của vectơ $\{\mathbf{r}\}$.

Sau khi xác định vectơ $\{\mathbf{r}\}$, ta xác định giá trị λ và tiếp tục các bước như trong phần trước đã trình bày.

Thí dụ 1.9.

Cực đại hóa hàm

$$Z = 16x_1 - x_1^2 + 2x_2 \quad (a)$$

với điều kiện

$$\left.\begin{aligned} & g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1 + x_2 \le 0 && (b) \\ & g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 50 \le 0 && (c) \\ & 3 \le x_1 \le 6 && (d) \\ & 3 \le x_2 \le 6 && (e) \end{aligned}\right\} \quad (1.63)$$

Trước hết, ta tính các vectơ građiên theo công thức (1.49):

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[(16 - 2x_1) \quad 2\right]$$

do đó:

$$\{\mathbf{d}\} = \{(16 - 2x_1) \qquad 2\}$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}) = \left[(2x_1 - 6) \quad 1\right]$$

$$\nabla g_2(\mathbf{x}) = \left[2x_1 \qquad 2x_2\right]$$

Giả sử điểm xuất phát là $\{\mathbf{x}_o\} = \{x_{1,0} \quad x_{2,0}\} = \{3 \;\; 3\}$. Ta có:

$$\nabla f(\mathbf{x}_o) = \left[(16 - 2.3) \quad 2\right] = \left[10 \quad 2\right]$$

do đó:

$$\{\mathbf{d}_o\} = \{d_{1,0} \quad d_{2,0}\} = \{10 \quad 2\}$$

Áp dụng công thức (1.48):

$$\{\mathbf{x}_1\} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

Vì $d_{1,0} = 10 > 0$, $d_{2,0} = 2 > 0$ nên không cần xét điều kiện (1.51). Để xác định λ_2, ta giải phương trình (1.61):

$$g_i(\mathbf{x}_1) = g_i(\mathbf{x}_o + \lambda \mathbf{d}_o) = b_i \qquad i = 1, 2$$

Căn cứ vào các hệ thức (1.63b), (1.63c), (1.64)

$$(3 + 10\lambda)^2 - 6(3 + 10\lambda) + (3 + 2\lambda) = 0 \quad (a)$$

$$(3 + 10\lambda)^2 + (3 + 2\lambda)^2 = 50 \quad (b)$$

Từ phương trình (a) ta được $\lambda_{2,1} = 0{,}235$

Từ phương trình (b) ta được $\lambda_{2,2} = 0{,}32$

Ta chọn giá trị λ bằng giá trị nhỏ nhất trong hai giá trị vừa tính ở trên. Vậy $\lambda = 0{,}235$. Điều này chứng tỏ điểm mới không vượt ra khỏi đường biên ứng với điều kiện tới hạn (1.63b). Thay giá trị λ vào phương trình (1.64)

$$\{x_1\} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,235\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,35 \\ 3,47 \end{pmatrix}$$

Điểm mới $\{x_1\} = \{x_v\}$ nằm trên đường biên ứng với điều kiện tới hạn (1.63b)

Tiếp tục tính các vectơ gradiên:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_v) &= [(16-2.5,35 \quad 2] = [5,3 \quad 2] \\
\nabla g_1(x_v) &= [(2.5,35-6) \quad 1] = [4,7 \quad 1] \\
\nabla g(x_v) &= [(2.5,35) \quad 2.3,47] = [10,7 \quad 6,94]
\end{aligned}$$

Thay các kết quả trên đây vào bài toán (1.62), ta có bài toán phi tuyến:

Cực đại hóa hàm $Z = \sigma$ (a)

Với điều kiện:

$$\left.\begin{aligned}
4,7r_1 + r_2 + \sigma &\le 0 \quad (b) \\
10,7r_1 + 6,94r_2 + \sigma &\le 0 \quad (c) \\
(-5,3r_1 - 2r_2) + \sigma &\le 0 \quad (d) \\
r_1^2 + r_2^2 &= 1 \quad (e)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.65)$$

Bài toán trên đây gồm 3 ẩn σ, r_1, r_2. Ta xác định các ẩn này bằng cách tìm giá trị lớn nhất của σ từ hai hệ phương trình sau:

$$\left.\begin{aligned}
4,7r_1 + r_2 + \sigma &= 0 \\
-5,3r_1 - 2r_2 + \sigma &= 0 \\
r_1^2 + r_2^2 &= 1
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

$$\left.\begin{aligned}
10,7r_1 + 6,94r_2 + \sigma &= 0 \\
(-5,3r_1 - 2r_2) + \sigma &= 0 \\
r_1^2 + r_2^2 &= 1
\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Nghiệm của phương trình (a) là:

$\sigma = 0,383$

$r_1 = -0,287$

$r_2 = 0,957$

Hệ phương trình (b) không có nghiệm.

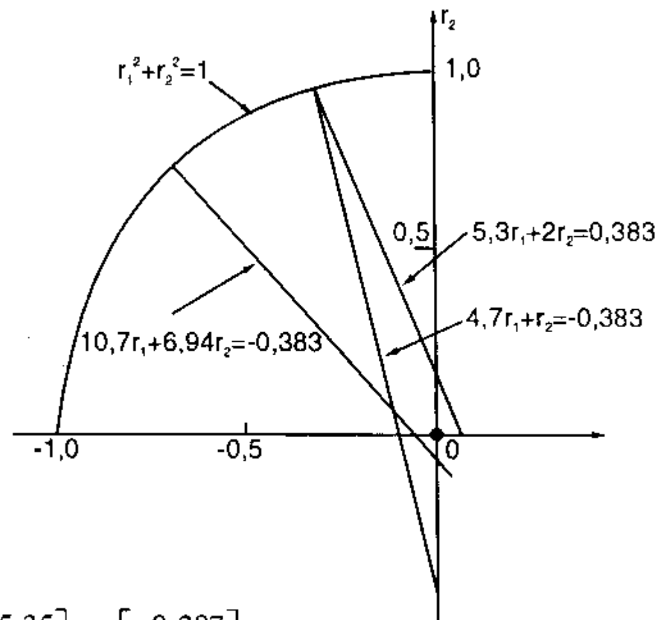
Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (hình 1.6). Thay $\sigma = 0,383$ vào hệ phương trình (a)

$$\left.\begin{aligned} 4,7r_1 + r_2 &= -0,383 \\ 5,3r_1 + 2r_2 &= 0,383 \\ r_1^2 + r_2^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (a')$$

Nghiệm r_1, r_2 của hệ phương trình (a') ứng với điểm giao nhau giữa hai đường thẳng và vòng tròn $r_1^2 + r_2^2 = 1$.

Sau khi xác định vectơ $\{\mathbf{d}_v\} = \{d_{1,n} \quad d_{2,n}\} = \{-0,287 \quad 0,957\}$ ta áp dụng công thức (1.48) để được điểm mới

$$\{x_2\} = \{x_1\} + \lambda \{d_v\}$$



Hình 1.6

Thay các kết quả vừa tính ở trên vào phương trình:

$$\{\mathbf{x}_2\} = \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,35 \\ 3,47 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -0,287 \\ 0,957 \end{bmatrix} \qquad (1.66)$$

Vì $d_{1,v} = d_{1,1} = -0,287 < 0$ và $x_{1,1} = x_{1,v} = 5,35 > 0$ nên phải xét đến điều kiện (1.51)

$$\lambda_{1,1} = -\frac{x_{1,1}}{d_{1,1}} = \frac{-5,35}{-0,287} = 19$$

Vì $d_{2,1} = 0,957 > 0$ nên không cần xét đến điều kiện (1.51). Do đó ta chọn $\lambda_1 = 19$.

Để xác định λ_2 ta giải phương trình (1.61):

$$g_i(x_2) = b_i \quad i = 1, 2$$

Thay hệ thức (1.66) vào các điều kiện (1.63b), (1.63c):

$$(5,35 - 0,287\lambda)^2 - 6(5,35 - 0,287\lambda) + (0,47 + 0,957\lambda) = 0 \quad a)$$

$$(5,35 - 0,287\lambda)^2 + (3,47 + 0,957\lambda)^2 - 50 = 0 \qquad (b)$$

Phương trình (b) cho giá trị min $\lambda_2 = 1,75$

Sau khi so sánh 2 giá trị λ_1 và λ_2 ta chọn $\lambda = 1,75$. Thay giá trị λ vào phương trình (1.66):

$$\{x_2\} = \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,35 \\ 3,47 \end{pmatrix} + 1,75 \begin{pmatrix} -0,287 \\ 0,957 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,85 \\ 5,14 \end{pmatrix}$$

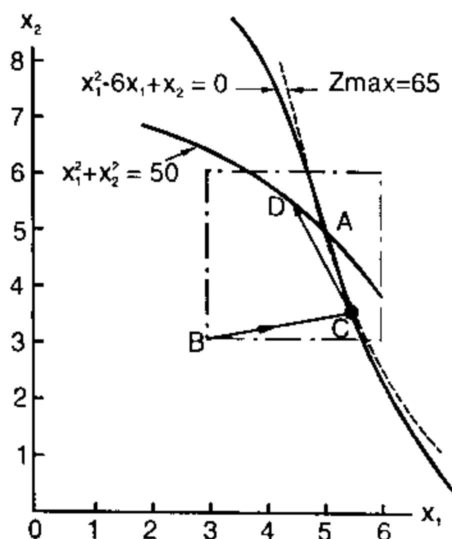
Căn cứ vào sự phân tích trên đây, điểm mới $\{x_2\}$ nằm trên đường biên ứng với điều kiện tới hạn thứ hai của bài toán.

Để được các điểm tiếp theo, ta lặp lại các bước như đã trình bày ở trên.

Trên hình (1.7), điểm xuất phát $\{x_o\} = \{3 \ \ 3\}$ ứng với điểm B. Từ điểm B, ta di chuyển đến điểm mới $\{x_1\}$ theo hướng vectơ građiên [10 2] với độ dài bước $\lambda = 0,235$. Điểm $\{x_1\}$ nằm trên đường biên ứng với điều kiện tới hạn thứ nhất và trùng với điểm C.

Từ điểm $\{x_1\}$, ta di chuyển đến điểm $\{x_2\}$ (điểm D trên hình 1.7) theo hướng vectơ $\{d_o\} = \{r\} = \{r_1 \quad r_2\} = \{-0,287 \quad 0,957\}$ với độ dài bước $\lambda = 1,75$.

Từ điểm $\{x_2\}$, ta di chuyển đến điểm $\{x_3\}$ nằm ngay dưới điểm A trên hình (1.7). Điểm cuối này ứng với giá trị max Z = 65.



Hình 1.7

§5. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA BÀI TOÁN QUY HOẠCH PHI TUYẾN

Trong tính toán kết cấu, bài toán quy hoạch phi tuyến thường gặp nhiều hơn bài toán quy hoạch tuyến tính. Giải bài toán quy hoạch phi tuyến thường khá phức tạp, nên người ta đã tìm cách tuyến tính hóa bài toán đó để có điều kiện sử dụng phương pháp đơn hình hoặc phương pháp građiên.

Có 2 hướng tuyến tính hóa bài toán quy hoạch phi tuyến:

1. Hướng tuyến tính hóa bằng chuỗi Taylor.

2. Hướng tuyến tính hóa từng mẫu.

§5.1. Phương pháp tuyến tính hóa bằng chuỗi Taylor

Giả sử có bài toán quy hoạch phi tuyến:

Cực đại hóa hàm

$$\left.\begin{aligned} & Z = f(x_1, x_2, \dots x_n) && \text{(a)} \\ & \text{Với điều kiện} && \\ & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0 && \text{(b)} \\ & i = 1,2,\dots m && \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 && \end{aligned}\right\} \qquad (1.67)$$

Trong đó, hàm Z và g_i đều có dạng phi tuyến. Để giải bài toán trên, ta tuyến tính hóa các hàm phi tuyến bằng cách giữ lại hai số hạng đầu tiên của chuỗi Taylor.

Giả sử cho trước giá trị $\varphi(x_o)$ của hàm $\varphi(x)$ tại điểm $\{x_o\}$. Theo định lí Taylor, giá trị của hàm $\varphi(x)$ tại điểm $\{x_1\}$ có thể viết gần đúng:

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_o) + \nabla\varphi(x_o).\left(\{x_1\} - \{x_o\}\right) \qquad (1.68)$$

Trong đó, $\nabla\varphi(x_o)$ là vectơ hàng $[\partial\varphi/\partial x_1 \ \partial\varphi/\partial x_2 \ ... \ \partial\varphi/\partial x_n]$ tại điểm $\{x\} = \{x_o\}$.

Áp dụng công thức (1.68) cho bài toán trên, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Cực đại hóa hàm

$$Z = f(x_o) + \nabla f(x_o).(\{x_1\} - \{x_o\}) \quad \text{(a)}$$

Với điều kiện:

$$g_i(x_1) = g_i(x_o) + \nabla g_i(x_o).(\{x_1\} - \{x_o\}) \quad \text{(b)}$$

$$x_{1,1}, x_{2,1}, ..., x_{n,1} \geq 0 \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (1.69)$$

Ta dùng phương pháp đơn hình hoặc phương pháp građiên để tìm phương án tối ưu $\{x_1^*\}$. Sau đó, thay $\{x_1^*\}$ vào $\{x_o\}$, $\{x_2\}$ vào $\{x_1\}$ để tìm phương án tối ưu $\{x_2^*\}$. Cứ như thế, ta tiếp tục quá trình tính lặp cho đến khi phương án tối ưu trong 2 vòng tính cuối cùng xấp xỉ nhau.

Thí dụ 1.10.

Cực đại hóa hàm

$$Z = 2x_1 + x_2 \quad \text{(a)}$$

Với điều kiện

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 - 6x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 80 &\leq 0 \\ x_1 \geq 3, x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)} \qquad (1.70)$$

Để đối chiếu các kết quả tính toán, trước hết ta giải bài toán trên theo phương pháp đồ thị (hình 1.8).

Phương án tối ưu xuất hiện tại điểm A: $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, max Z = 16.

Đây là điểm giao nhau giữa 2 đường biên ứng với hệ điều kiện ràng buộc tới hạn (1.70b).

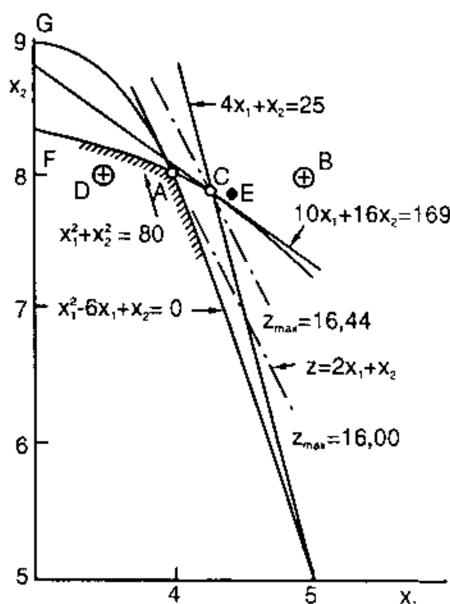
Bây giờ ta thử giải bài toán trên bằng cách giữ 2 số hàng đầu của chuỗi Taylor. Trước hết, ta tính các vectơ građiên.

$$\nabla f(x) = [\partial f/\partial x_1 \quad \partial f/\partial x_2] = [2 \quad 1] \quad (1.71)$$

$$\nabla g_1(x) = [\partial g_1/\partial x_1 \quad \partial g_1/\partial x_2] = [(2x_1 - 6) \quad 1] \quad (1.72)$$

$$\nabla g_2(x) = [\partial g_2/\partial x_1 \quad \partial g_2/\partial x_2] = [2x_1 \quad 2x_2] \quad (1.73)$$

Giả sử xuất phát từ một điểm bất kì chẳng hạn điểm B(x_1 = 5, x_2 = 8) nằm ngoài miền nghiệm (hình 1.8). Thay giá trị $\{x\} = \{x_0\} = \{x_{1,0} \quad x_{2,0}\} = \{5 \quad 8\}$ vào các hệ thức (1.70a), (1.70b):



Hình 1.8

$$f(x_0) = 2.5 + 8 = 18$$
$$g_1(x_0) = 5.5 - 6.5 + 8 = 3$$
$$g_2(x_0) = 5.5 + 8.8 - 80 = 9$$

Thay giá trị $\{x_0\}$ vào các vectơ građiên (1.71), (1.72), (1.73):

$$\nabla f(x_0) = [2 \quad 1];\ \nabla g_1(x_0) = [4 \quad 1];\ \nabla g_2(x_o) = [10 \quad 6]$$

Áp dụng các kết quả trên vào bài toán (1.69), ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Cực đại hóa hàm:

$$Z = 18 + \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (x_1 - 5) \\ (x_2 - 8) \end{pmatrix} \qquad (a)$$

Với điều kiện:

$$3 + \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} (x_1 - 5) \\ (x_2 - 8) \end{pmatrix} \leq 0 \qquad (b)$$

$$9 + \begin{pmatrix} 10 & 16 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (x_1 - 5) \\ (x_2 - 8) \end{pmatrix} \leq 0 \qquad (c)$$

Sau khi chỉnh lí kết quả tính toán, ta có bài toán:

Cực đại hóa hàm

$$Z = 2x_1 + x_2$$

với điều kiện:

$$4x_1 + x_2 - 25 \leq 0$$
$$10x_1 + 16x_2 - 169 \leq 0$$
$$x_1 \geq 3,\ \ x_2 \geq 0$$

Áp dụng phương pháp đơn hình, ta được phương án tối ưu: max Z = 16, 44 ứng với $x_1 = 4{,}278$, $x_2 = 7{,}888$. Phương án tối ưu xuất hiện tại điểm C (hình 1.8) là điểm giao nhau giữa các đường $4x_1 + x_2 - 25 = 0$ và đường $10x_1 + 16x_2 - 169 = 0$.

Bước sang vòng tính thứ hai, ta thay điểm $\{x_1^*\} = \{x_{1,1} \quad x_{2,1}\} = \{4{,}278 \quad 7{,}888\}$ vào điểm $\{x_0\}$ và thay điểm $\{x_2\} = \{x_{1,2} \quad x_{2,1}\}$ vào điểm $\{x_1\}$ trong bài toán (1.70). Sau khi chỉnh lí kết quả tính toán, ta có bài toán:

Cực đại hóa hàm

$$Z = 2x_1 + x_2$$

với điều kiện:

$$2{,}556x_1 + x_2 - 18{,}267 \leq 0$$
$$8{,}556x_1 + 15{,}776x_2 - 166{,}278 \leq 0$$
$$x_1 \geq 3, \quad x_2 \geq 0$$

Giải bài toán trên, ta được phương án tối ưu: max Z = 16,03 ứng với $x_1 = 4{,}03$, $x_2 = 7{,}97$.

Kết quả này xấp xỉ với phương án tối ưu xác định theo phương pháp đồ thị. Nếu tiếp tục vòng tính thứ 3, kết quả cũng sẽ như trên.

Giả sử xuất phát từ điểm F($x_1 = 3$, $x_2 = 8$) (xem hình 1.8). Vòng tính đầu tiên cho phương án tối ưu $x_1 = 51$, $x_2 = 0$. Vòng tính thứ hai: $x_1 = 14{,}45$, $x_2 = 0$. Các vòng tính sau cho phương án tối ưu: $x_1 = 6$, $x_2 = 0$. Kết quả này rõ ràng là không chính xác.

Giả sử thay điều kiện phi tuyến $x_1^2 + x_2^2 - 80 \le 0$ trong bài toán (1.70) bằng điều kiện tuyến tính $x_2 - 9 \le 0$.

Ta có bài toán:

Cực đại hóa hàm

$$Z = 2x_1 + x_2 \quad \text{(a)}$$

với điều kiện:

$$\left.\begin{aligned} & x_1^2 - 6x_1 + x_2 \le 0 \quad \text{(b)} \\ & x_2 - 9 \le 0 \quad \text{(c)} \\ & x_1 \ge 3,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.74)$$

Phương án tối ưu của bài toán này vẫn xuất hiện tại điểm A (hình 1.8): $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. Tuy nhiên, nếu ta cũng xuất phát từ điểm B (hình 1.8) rồi thực hiện các bước tuyến tính hóa như đã trình bày ở trên thì phương án tối ưu sẽ là: max Z = 15 ứng với $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. Kết quả này không chính xác.

Từ các kết quả trong 2 thí dụ trên, ta có mấy nhận xét sau:

1) Phương án tuyến tính hóa bằng chuỗi Taylor không phải lúc nào cũng cho kết quả chính xác. Chẳng hạn xuất phát từ điểm F sẽ dẫn đến những sai số rất lớn. Tuy nhiên, nếu ta biết chọn điểm xuất phát hợp lí (chẳng hạn điểm D, điểm B) thì khuyết điểm trên đây có thể khắc phục được.

2) Phương án tuyến tính hóa bằng chuỗi Taylor chỉ có hiệu lực khi phương án tối ưu xuất hiện tại điểm giao nhau giữa các đường biên trong bài toán gốc phi tuyến. Chẳng hạn kết quả tính toán trong thí dụ thứ 2 là không chính xác vì phương án tối ưu trong bài toán gốc phi tuyến xuất hiện tại điểm A, chứ không phải tại điểm G (điểm giao nhau giữa hai đường biên ứng với các điều kiện tới hạn (1.74b) và (1.74c).

§5.2. Phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu

Phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu áp dụng cho bài toán quy hoạch phi tuyến:

Cực đại hóa hàm:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

Với điều kiện:

$$\left.\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j)\{\geq\ =\ \leq\} b_i \\ & i = 1, 2, \ldots m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots n \end{aligned}\right\} \qquad (1.75)$$

Trong đó, các biến x_j xuất hiện riêng biệt trong các hàm f_j và g_{ij} nên ta gọi nó là bài toán có biến tách rời.

Vấn đề đặt ra là phương án tối ưu của bài toán gần đúng giải theo phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu có tính chất cục bộ hay toàn bộ? Điều này phụ thuộc vào tính chất *lồi* hoặc *lõm* của hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc.

Nếu f(x) là một *hàm lõm* trong miền lồi kín X thì giá trị *cực đại cục bộ* của f(x) trong X cũng là giá trị *cực đại toàn bộ* của f(x) trong X.

Nếu f(x) là một *hàm lồi* trong miền lồi kín X thì giá trị *cực tiểu cục bộ* của f(x) trong X cũng là giá trị *cực tiểu toàn bộ* của f(x) trong X.

Nói chung, khi áp dụng bài toán gần đúng tuyến tính hóa từng mẫu, ta chỉ có thể xác định giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) *cục bộ* của hàm mục tiêu. Chỉ khi nào các hàm f_j, g_{ij} thỏa mãn các tính chất lồi (hoặc lõm) thích hợp sao cho giá trị cực tiểu (cực đại) cục bộ đồng thời cũng là giá trị cực tiểu (cực đại) toàn bộ, ta mới có thể tìm được giá trị cực tiểu (cực đại) *toàn bộ* cho bài toán gần đúng. Từ đó, suy ra giá trị cực tiểu (cực đại) *toàn bộ* cho bài toán phi tuyến (1.75).

Sau đây là một số khái niệm về hàm lồi, hàm lõm.

§5.2.1. Khái niệm về hàm lồi, hàm lõm

Hàm lồi: hàm f(x) gọi là *hàm lồi* trong miền lồi $X \in E^n$ nếu ứng với hai điểm bất kì $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ và ứng với mọi giá trị λ sao cho $0 \leq \lambda \leq 1$, nó thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1) \geq f\left[\lambda x_2 + (1-\lambda) x_1\right] \qquad (1.76)$$

Hàm lõm: Hàm f(x) gọi là *hàm lõm* trong miền lồi $x \in E^n$ nếu ứng với hai điểm bất kì x_1, $x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ và ứng với giá trị λ sao cho $0 \leq \lambda \leq 1$, nó thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\lambda f(x_2) + (1 - \lambda)\, f(x_1) \leq f[\lambda(x_2 + (1 - \lambda)x_1] \qquad (1.77)$$

Chẳng hạn f(x) = 1/x là một hàm lồi với mọi giá trị x > 0 vì nó thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\lambda}{x_2} + \frac{1-\lambda}{x_1} > \frac{1}{\lambda x_2 + (1-\lambda) x_1} \qquad \text{(a)}$$

Thực vậy, nếu bất đẳng thức trên được thoả mãn thì sau khi nhân hai vế của nó với $\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$, điều kiện sau đây cũng được thỏa mãn:

$$(1-\lambda).\lambda.(x_1 - x_2)^2 / x_1.x_2 \geq 0 \qquad \text{(b)}$$

Vế trái của (b) luôn luôn dương theo giả thiết của bài toán nên ngược lại điều kiện (a) ắt phải được thỏa mãn. Đó là điều phải chứng minh. Ta gọi hàm trên là hàm *lồi ngặt.*

Hàm lồi có những tính chất cơ bản sau đây:

1) Nếu hàm f(x) là một hàm lồi thì hàm -f(x) là một *hàm lõm.*

2) Hàm tuyến tính f(x) = c.x (c là hằng số) là một hàm vừa lồi vừa lõm.

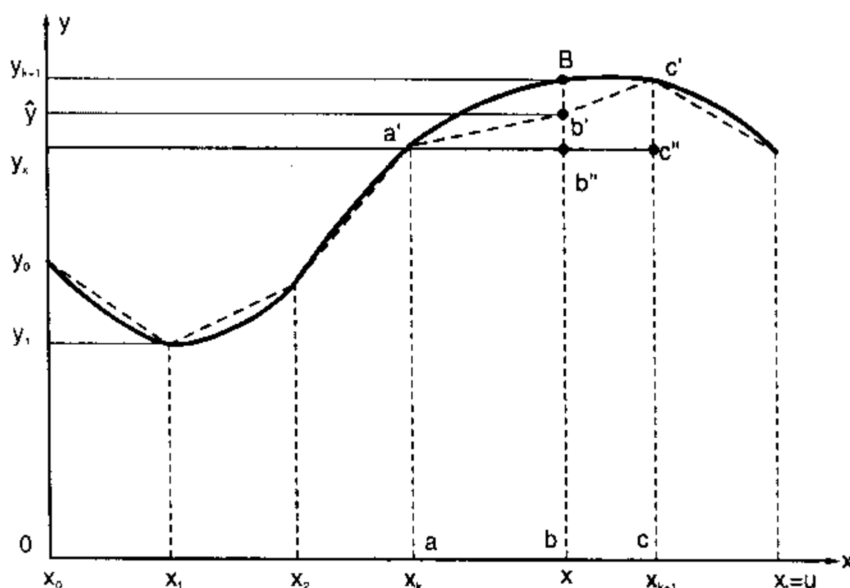
Tính chất này suy ra từ tính chất 1.

3) Tổng của các hàm lồi (lõm) là một hàm lồi (lõm).

§5.2.2. Nội dung phương pháp tính tuyến tính hóa từng mẫu.

Thực chất của phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu là thay đồ thị của hàm có biến tách rời bằng một đường gẫy khúc.

Giả sử cho hàm y = f(x) biểu thị như hình (1.9).



Hình 1.9

Từ điểm $x = x_0$ đến điểm $x_t = u$, ta chia trục hoành thành t đoạn nhỏ giới hạn bởi (t+1) điểm. Để tuyến tính hóa hàm y, ta thay cung trong mỗi đoạn chia bằng đoạn thẳng tương ứng. Chẳng hạn cung a'Bc' ứng với đoạn (x_k, x_{k+1}) trên hình (1.9) thay thế bằng đoạn thẳng a'b'c'. Vì vậy, giữa hai điểm lân cận bất kì x_k và x_{k+1}, hàm y ứng với điểm x được thay bằng hàm $\hat{y} = \hat{f}(x)$ trong đó $\hat{y}$ = bb' (xem hình 1.9).

Ta suy ra các hệ thức sau đây:

Đặt $\alpha = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$. Từ các quan hệ hình học trên hình (1.9) ta có:

$$x = \beta_k x_k + \beta_{k+1} x_{k+1} \quad (1.78)$$

$$\hat{y} = \beta_k y_k + \beta_{k+1} y_{k+1} \quad (1.79)$$

trong đó:

$$\left.\begin{aligned} \beta_k &= 1 - \alpha \\ \beta_{k+1} &= \alpha \end{aligned}\right\} \quad (1.80)$$

$$\alpha = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad 0 \le \alpha \le 1 \quad (1.81)$$

Giá trị bất kì của biến x và giá trị hàm $\hat{y}$ ứng với biến x có thể biểu thị bằng các hệ thức sau đây:

$$x = \beta_o x_o + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \beta_{k+1} x_{k+1} + \ldots + \beta_t x_t = \sum_{k=0}^{t} \beta_k x_k \quad (1.82)$$

$$\hat{y} = \hat{f}(x) = \beta_o y_o + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_k y_k + \beta_{k+1} y_{k+1} + \ldots + \beta_t y_t = \sum_{k=0}^{t} \beta_k y_k \quad (1.83)$$

Hệ số β phải thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_k \ge 0 \qquad k=0,1,2 \ldots t \\ &\sum_{k=0}^{t} \beta_k = 1 \end{aligned}\right\} \quad (1.84)$$

Căn cứ vào các hệ thức (1.78), (1.79), ta có thể suy ra các tính chất sau đây:

1) Số hệ số β có giá trị dương không lớn hơn 2.

2) Nếu có 2 hệ số dương $\beta_r > 0$, $\beta_s > 0$ thì chỉ số s chỉ có thể là s = r -1 hoặc s = r + 1.

3) Nếu hệ số $\beta_r = 0$ thì ắt phải có $\beta_{r-1} = 1$ hoặc $\beta_{r+1} = 1$.

Ta sẽ minh họa các vấn đề trên đây bằng một thí dụ đơn giản. Cho hàm $y=f(x) =2x^2$, $0 \le x \le 2$. Để tuyến tính hóa hàm y, từ điểm $x_0 = 0$ đến điểm $x_t = 2$, ta chia trục hoành thành 8 đoạn bằng nhau giới hạn bởi các điểm $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}50$..., $x_8 = 2$ (nói chung không nhất thiết phải chia đều). Ta lần lượt tính giá trị của hàm $y = 2x^2$ Tại các điểm chia. Kết quả ghi trên bảng (1.13)

Bảng 1.13

Điểm	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$y = 2x^2$	0	0,125	0,500	1,125	2,000	3,125	4,500	6,125	8,00

Giả sử cần xác định giá trị của hàm $\hat{y} = \hat{f}(x)$ tại điểm x = 1,1 (nằm giữa điểm $x_4 = 1$ và $x_5 = 1,25$). Áp dụng các công thức (1.80), (1.81).

$$\beta_5 = \alpha = \frac{x - x_4}{x_5 - x_4} = \frac{1,1-1}{1,25-1} = \frac{2}{5}$$

$$\beta_4 = 1 - \beta_5 = \frac{3}{5}$$

Áp dụng điều kiện (1.84)

$$\beta_o + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 3/5 + 2/5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \beta_o + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 = 0$$

nhưng vì $\beta_k \geq 0$ k = 0, 1, 2,...,8

nên $\beta_o = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = 0$. Áp dụng các công thức (1.78), (1.79):

$$x = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 = (3/5).1 + (2/5).1,25 = 1,1$$
$$\hat{y} = \beta_4 y_4 + \beta_5 y_5 = (3/5).2 + (2/5).3,125 = 2.45$$

Giá trị chính xác của $y = 2(1,1)^2 = 2,42$. Ta nhận thấy hàm $y = 2x^2$ là một hàm lồi trong khoảng từ điểm x_4 đến x_5 vì nó thỏa mãn điều kiện (1.76):

$$y = f(1,1) = 2,42 < \hat{y} = \hat{f}(1,1) = 2,45$$

Bây giờ ta hãy trở về bài toán tuyến tính hóa từng mẫu. Giả sử mỗi biến χ_j đều có cận trên là u_j.

Ta chia khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm u_j thành t_j đoạn giới hạn bởi $t_j + 1$ điểm sao cho:

$$x_{0j} = 0 \leq x_{1j} \leq ... \leq x_{kj} \leq x_{k+1j} \leq ... \leq x_{tj} = u_j$$

Áp dụng hệ thức (1.83) cho các hàm $f_j(x_j)$ và $g_{ij}(x_j)$:

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{t_j} \beta_{kj} f_j(x_{kj}) \tag{1.85}$$

$$\hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{t_j} \beta_{kj} g_{ij}(x_{kj}) \tag{1.86}$$

Áp dụng các hệ thức (1.82) và (1.84):

$$\left.\begin{array}{l} x_j = \sum_{k=0}^{t_j} \beta_{kj} x_{kj} \\ \sum_{k=0}^{t_j} \beta_{kj} = 1, \beta_{kj} \geq 0 \\ \text{với mọi k và j} \end{array}\right\} \tag{1.87}$$

Thay các hệ thức (1.85) và (1.86) vào bài toán (1.75), ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Cực đại hóa hàm:

$$\hat{Z} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{t_j}\beta_{kj}f_j(x_{kj}) \qquad (a)$$

với điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{t_j}\beta_{kj}.g_{ij}(x_{kj})\{\leq \; = \; \geq\}b_i \qquad (b)$$

$i = 1, 2, \ldots m$

$$\sum_{k=0}^{t_j}\beta_{kj} = 1 \qquad (c)$$

$\beta_{kj} \geq 0$ với mọi k và j, $j = 1, 2, \ldots, n$

Trong bài toán trên, $f_j(x_j)$ và $g_{ij}(x_j)$ là những giá trị đã biết, còn β_{kj} là các biến; Vấn đề đặt ra là tìm giá trị của các biến β_{kj} sao cho chúng vừa thỏa mãn các điều kiện (1.88b), (1.88c), vừa cực đại hóa hàm Z.

Thí dụ 1.11.

Cực đại hóa hàm

$$Z = 16x_1 - x_1^2 + 2x_2 \qquad (a)$$

với điều kiện

$$\left.\begin{aligned} & x_1^2 - 6x_1 + x_2 \leq 0 && (b) \\ & x_1^2 + x_2^2 - 50 \leq 0 && (c) \\ & 6 \geq x_1 \geq 3,\; 6 \geq x_2 \geq 3 && (d) \end{aligned}\right\} \qquad (1.89)$$

Trước hết, ta nhận thấy rằng hàm mục tiêu Z là một hàm lõm trong miền xác định bởi điều kiện (1.89d) vì nó thỏa mãn điều kiện (1.77). Đồng thời, miền nghiệm xác định bởi các điều kiện (1.89b), (1.89c), (1.89d) là một miền lồi kín (xem hình 1.10). Do đó phương án tối ưu cục bộ của bài toán (1.89) cũng sẽ là phương án tối ưu toàn bộ của nó.

Căn cứ vào bài toán (1.89), ta thấy $f_1(x_1) = 16x_1 - x_1^2$; $f_2(x_2) = 2x_2$; $g_{11}(x_1) = x_1^2 - 6x_1$; $g_{12}(x_2) = x_2$; $g_{21}(x_1) = x_1^2$; $g_{22}(x_2) = x_2^2$; $b_1 = 0$; $b_2 = 50$. Đối với biến x_1 cũng như biến x_2 từ điểm $x_j = 3$ đến điểm $x_j = 6$, ta chia trục hoành thành 3 đoạn bằng nhau giới hạn bởi các điểm $x_{0j} = 3$, $x_{1j} = 4$, $x_{2j} = 5$, $x_{3j} = 6$.

Kết quả tính giá trị các hàm f_{ij} và g_{ij} ứng với các điểm chia ghi trên bảng (1.14)

Bảng 1.14

x_1	g_{11}	g_{21}	f_1	x_2	g_{12}	g_{22}	f_2
3	-9	9	39	3	3	9	6
4	-8	16	48	4	4	16	8
5	-5	25	55	5	5	25	10
6	0	36	60	6	6	36	12

Trong bài toán trên, chỉ số k biến thiên từ 3 đến 6. Có thể thay x = X - 3 trong đó X là biến mới để cho k biến thiên từ 0 trở đi song cũng không cần thiết làm như vậy. Thay các kết quả tính toán trên đây vào phương trình (1.88a), hệ thức (1.88b) và chú ý rằng k biến thiên từ 3 đến 6, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Cực đại hóa hàm:

$$\hat{Z} = 39\beta_{31} + 48\beta_{41} + 55\beta_{51} + 60\beta_{61} + 6\beta_{32} + 8\beta_{42} + 10\beta_{52} + 12\beta_{62} \quad \text{(a)}$$

với điều kiện:

$$\left.\begin{aligned} & -9\beta_{31} - 8\beta_{41} - 5\beta_{51} + 0\beta_{61} + 3\beta_{32} + 4\beta_{42} + 5\beta_{52} + 6\beta_{62} \le 0 \\ & 9\beta_{31} + 16\beta_{41} + 25\beta_{51} + 36\beta_{61} + 9\beta_{32} + 16\beta_{42} + 25\beta_{52} + 36\beta_{62} \le 50 \quad \text{(b)} \\ & \beta_{31} + \beta_{41} + \beta_{51} + \beta_{61} = 1 \;\; (\text{với biến } x_1) \\ & \beta_{32} + \beta_{42} + \beta_{52} + \beta_{62} = 1 \;\; (\text{với biến } x_2) \\ & \beta_{kj} \ge 0 \qquad k = 3, 4, 5, 6 \quad j = 1, 2 \end{aligned}\right\} \quad (1.90)$$

Ta giải bài toán trên đây bằng phương pháp đơn hình. Sau khi đưa các biến đệm y_1, y_2 và các biến giả tạo y_3, y_4 vào hệ điều kiện (1.90b), ta thành lập bảng đơn hình (1.15a).

Trong hai bảng đơn hình (1.15b), (1.15c), ta khử hai biến giả tạo y_3 và y_4. Các ẩn tự do β_{51} và β_{52} trở thành ẩn cơ bản (xem bảng (1.15c)). Nhưng vì trong phương án tối ưu, chỉ được phép xuất hiện nhiều nhất là 2 biến dương với 2 chỉ số k lân cận, nên trong bảng đơn hình tiếp theo, ta phải tìm cách hoán vị ẩn tự do và ẩn cơ bản sao cho các ẩn tự do sau đây trở thành ẩn cơ bản:

1) β_{41} hoặc β_{61} đối với biến x_1

2) β_{42} hoặc β_{62} đối với biến x_2

Trong bảng (1.15c), ta có thể hoán vị 2 ẩn y_2 và β_{41} hoặc y_2 và β_{61}, nhưng vì phần tử ứng với cột β_{41} là số -9 < 0 nên ta hoán vị 2 ẩn y_2 và β_{61} (phần tử chốt là số 11 > 0).

Trong bảng (1.15d), ta có thể hoán vị 2 ẩn y_1 và β_{42} hoặc y_1 và β_{62} nhưng vì phần tử ứng với cột β_{62} là số -4 < 0 nên ta hoán vị y_1 và β_{42} (phần tử chốt là số 3,1 > 0).

Bảng đơn hình cuối cùng (1.15e) cho phương án tối ưu: max $\hat{Z} = 65$ ứng với $\beta_{51} = 1$, $\beta_{61} = 0$, $\beta_{42} = 0$ và $\beta_{52} = 1$.

Áp dụng công thức (1.82) và sử dụng kết quả trong bảng (1.14):

Bảng 1.15

	b_{31}	β_{41}	β_{51}	β_{61}	β_{32}	β_{42}	β_{52}	β_{62}	b	
	-9	-8	-5	0	3	4	5	6	0	y_1
	9	16	25	36	9	16	25	36	50	y_2
(a)	1	1	(1)	1	0	0	0	0	1	y_3
	0	0	0	0	1	1	1	1	1	y_4
	39	48	55	60	6	8	10	12	0	$-\hat{Z}$
	b_{31}	β_{41}	y_3	β_{61}	β_{32}	β_{42}	β_{52}	β_{62}	b	
	-4	-3		5	3	4	5	6	5	y_1
(b)	-16	-9		11	9	16	25	36	25	y_2
	1	1		1	0	0	0	0	1	β_{51}
	0	0		0	1	1	(1)	1	1	y_4
	-19	-7		5	6	8	10	12	-55	$-\hat{Z}$
	b_{31}	β_{41}		β_{61}	β_{32}	β_{42}	y_4	β_{62}	b	
	-4	-3		5	-2	-1		1	0	y_1
(c)	-16	-9		(11)	-16	-9		11	0	y_2
	1	1		1	0	0		0	1	β_{51}
	0	0		0	1	1		1	1	β_{52}
	-19	-7		5	-4	-2		2	-65	$-\hat{Z}$
	b_{31}	β_{41}		y_2	β_{32}	β_{42}		β_{62}	b	
	3,25	1,1		-0,45	5,25	(3,1)		-4	0	y_1
(d)	-1,45	-0,82		0,091	-1,45	-0,82		1	0	β_{61}
	2,45	1,82		-0,091	1,45	0,82		-1	1	β_{51}
	0	0		0	1	1		1	1	β_{52}
	-11,55	-6,59		-0,454	3,25	2,2		-3	-65	$-\hat{Z}$
	b_{31}	β_{41}		y_2	β_{32}	y_1		β_{62}	b	
	1,05	0,355		-0,145	1,69	0,323		-1,29	0	β_{42}
(e)						0,264			0	β_{61}
						-0,264			1	β_{51}
						-0,323			1	β_{52}
	13,86	-7,37		-0,14	-0,47	-0,71		-0,16	-6,5	$-\hat{Z}$

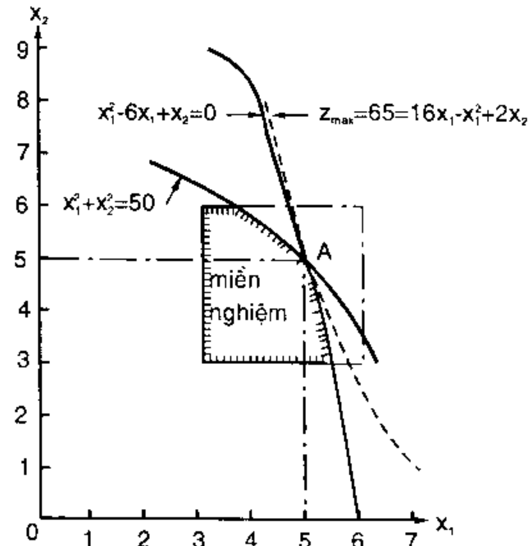
Chú thích : *Các phần tử khoanh tròn trong bảng là các phần tử chốt.*

$x_1 = \beta_{51}.x_{51} + \beta_{61}.x_{61} = 1.x_{51} + 0.x_{61} = 1.5 = 5$
$x_2 = \beta_{42}.x_{42} + \beta_{52}.x_{52} = 0.x_{42} + 1.x_{52} = 1.5 = 5$

Vậy phương án tối ưu của bài toán này là: max Z = 65 ứng với $x_1 = 5$, $x_2 = 5$.

Hình (1.10) ghi lại kết quả tính theo phương pháp đồ thị. Miền gạch chéo biểu thị miền nghiệm.

Đường biên $x_1^2 + x_2^2 = 50$ và đường biên $x_1^2 - 6x_1 + x_2 = 0$ giao nhau tại điểm A. Điểm này ứng với phương án tối ưu: max Z = 65, $x_1 = 5$ và $x_2 = 5$. Vậy kết quả tính theo phương pháp gần đúng hoàn toàn phù hợp với kết quả tính theo phương pháp đồ thị. Tuy nhiên, cần phải thấy rằng nếu điểm chia không trùng với điểm 5 thì sẽ có sai số (xem bảng 1.14).



Hình 1.10

Do đó, càng có nhiều điểm chia, kết quả càng chính xác. Mặt khác, phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu có thể cho phương án tối ưu cục bộ. Khi có nhiều phương án tối ưu cục bộ, ta sẽ chọn phương án tối ưu có lợi nhất.

Cuối cùng, cần chú ý rằng phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu chỉ áp dụng cho bài toán phi tuyến có biến tách rời. Nếu các biến không tách rời nhau, chẳng hạn khi tích hoặc thương của biến xuất hiện, ta phải tìm cách tách rời trước khi sử dụng phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu.

§5.3. Phương pháp tách rời biến

Giả sử có tích của 2 biến $x_i.x_j$. Để tách rời 2 biến x_i và x_j, ta đưa vào 2 biến mới ω_i, ω_j sao cho:

$$\begin{aligned} \omega_i &= x_i + \varepsilon_i \\ \omega_j &= x_j + \varepsilon_j \end{aligned} \qquad (a)$$

Trong đó, ε_i, ε_j là những số dương tùy ý. Lúc này, ω_i, ω_j thỏa mãn các điều kiện:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i \geq \varepsilon_i \geq 0 \\ \omega_j \geq \varepsilon_j \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Từ hệ thức (a) ta suy ra:

$$x_i.x_j = (\omega_i - \varepsilon_i).(\omega_j - \varepsilon_j) = \omega_i.\omega_j - \varepsilon_i\omega_j - \varepsilon_j\omega_j + \varepsilon_i\varepsilon_j \qquad (c)$$

Đặt $y = \omega_i\omega_j$ (d) $\Rightarrow \ln y = \ln\omega_i + \ln\omega_j$ (e)

Thay hệ thức (d) vào hệ thức (c):

$$x_i.x_j = y - \varepsilon_i\omega_j - \varepsilon_j\omega_i + \varepsilon_i\varepsilon_j \qquad (1.91)$$

Vậy khi tích của 2 biến $x_i.x_j$ xuất hiện trong bài toán phi tuyến, ta thay nó bằng hệ thức (1.91) trong đó ω_i, ω_j, y là các biến mới. Sau khi kết hợp các hệ thức (a), (b) và (e), ta có các điều kiện ràng buộc bổ sung:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i = x_i + \varepsilon_i \\ &\omega_j = x_j + \varepsilon_j \\ &\varepsilon_i, \varepsilon_j \text{ - số dương tuỳ ý} \\ &\ln y = \ln \omega_i + \ln \omega_j \end{aligned}\right\} \qquad (1.92)$$

Phương pháp này có thể mở rộng cho trường hợp tích của nhiều biến.

§6. PHƯƠNG PHÁP QUY HOẠCH HÌNH HỌC

Phương pháp quy hoạch hình học [7] áp dụng cho bài toán phi tuyến có dạng đặc biệt trong đó hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc là những đa thức, mỗi số hạng của đa thức là tích của các biến mang số mũ. Giải trực tiếp bài toán này khá phức tạp nên người ta đã tìm cách đưa nó về bài toán tương đương trên cơ sở giải một hệ phương trình đại số tuyến tính.

Trước hết ta hãy xét hai bài toán sau;

Bài toán 1

$$\left.\begin{aligned} &\text{Cực tiểu hóa hàm} \qquad g_o(x) \\ &\text{với điều kiện:} \\ &x_1 > 0 \qquad x_2 > 0 \,\ldots\ldots\ldots\, x_m > 0 \qquad \text{(a)} \\ &g_1(x) \le 1 \qquad g_2(x) \le 1 \ldots\ldots g_p(x) \le 1 \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (1.93)$$

Trong đó:

$$g_k(x) = \sum_{i=m_k}^{n_k} C_i x_1^{a_{i1}}.x_2^{a_{i2}}\ldots x_m^{a_{im}} \qquad (1.94)$$

$k = 0, 1, 2,\ldots p$

$$m_o = 1,\ m_1 = n_o + 1,\ m_2 = n_1 + 1, \ldots,\ m_p = n_{p-1} + 1,\ n_p = n \qquad (1.95)$$

Các số mũ a_{ij} là những số thực bất kì, các hệ số C_i dương. Số thứ tự của các số hạng trong mỗi đa thức $g_k(x)$ xếp từ đầu đến cuối như sau:

Đa thức $g_o(x)$: 1 2 3 .... n_o

Đa thức $g_1(x)$: $n_o + 1$ $n_0 + 2$ .... n_1

Đa thức $g_2(x)$: $n_1 + 1$ $n_1 + 2$ .... n_2

....

....

Đa thức $g_p(x)$: $n_{p-1} + 1$ $n_{p-2} + 2$ .... $n = n_p$

Hàm mục tiêu $g_o(x)$ và toàn bộ các điều kiện ràng buộc hợp thành p + 1 đa thức với tổng số hạng bằng n.

Ta gọi $g_0(x)$ là *hàm gốc* và các biến $x_1, x_2, ..., x_m$ là các *biến gốc*. Các điều kiện (1.93a) gọi là các điều kiện ràng buộc *tự nhiên*. Các điều kiện (1.93b) gọi là các điều kiện ràng buộc *cưỡng bức*. Toàn bộ các điều kiện ràng buộc nói trên gọi là ***điều kiện ràng buộc gốc***.

Bài toán 2:

Cực đại hóa hàm tích:

$$v(\delta) = \left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{C_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right].\prod_{k=1}^{p}\lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \qquad (1.96)$$

Trong đó:

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{i=m_k}^{n_k}\delta_i, \qquad k = 1, 2,... p \qquad (1.97)$$

Các hệ số C_i dương. Vectơ biến $\delta = (\delta_1\ \delta_2 ... \delta_n)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\delta_1 \geq 0,\ \ \delta_2 \geq 0... , \delta_n \geq 0 \qquad (1.98)$$

$$\sum_{i=1}^{n_0}\delta_i = 1 \qquad (1.99)$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\delta_i = 0\ , \quad j = 1, 2, ... m \qquad (1.100)$$

Các hệ số a_{ij} là những số thực bất kì. Ta gọi bài toán 2 là *bài toán đối ngẫu*, hàm $v(\delta)$ là *hàm đối ngẫu*; các biến $\delta_1, \delta_2 ... , \delta_n$ là các *biến đối ngẫu*, điều kiện (1.98) là *điều kiện dương*; điều kiện (1.99) là *điều kiện chuẩn hóa*, điều kiện (1.100) là *điều kiện trực giao*. Ta gọi chung các điều kiện trên là điều kiện *ràng buộc đối ngẫu*.

Quan hệ tương ứng giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu như sau.

Các số C_i trong hàm đối ngẫu $v(\delta)$ là các hệ số trong các đa thức $g_k(x)$, k = 0, 1, 2, ...p của bài toán gốc. Tổng các số hạng trong bài toán gốc bằng tổng các biến đối ngẫu δ_i.

Số thừa số $\lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$ trong hàm đối ngẫu $v(\delta)$ bằng số điều kiện ràng buộc cưỡng bức trong bài toán gốc. Tổng số các số hạng của hàm gốc $g_0(x)$ bằng tổng số các số hạng trong điều kiện ràng buộc chuẩn hóa của bài toán đối ngẫu. Số phương trình trong điều kiện trực giao của bài toán đối ngẫu bằng tổng số các biến gốc.

Sau đây là một số định lí cơ bản về quan hệ tương ứng giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Định lí 1: Nếu hàm gốc $g_0(x)$ đạt giá trị *cực tiểu* tại một điểm thỏa mãn các điều kiện ràng buộc gốc thì:

1) Hàm đối ngẫu $v(\delta)$ cũng đạt giá trị *cực đại* tại một điểm thỏa mãn các điều kiện ràng buộc đối ngẫu.

2) Giá trị *cực đại* của hàm đối ngẫu bằng giá trị cực tiểu của hàm gốc.

Định lí 2: Nếu hàm đối ngẫu v(δ) đạt giá trị *cực đại* tại một điểm δ* với các thành phần dương thỏa mãn các điều kiện ràng buộc đối ngẫu thì hàm gốc $g_0(x)$ cũng đạt giá trị *cực tiểu* tại một điểm x* thỏa mãn các điều kiện ràng buộc gốc.

Hai định lí trên đây cho phép ta đưa bài toán gốc về dạng bài toán đối ngẫu trong đó các biến đối ngẫu $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ thỏa mãn các phương trình (1.99), (1.100):

$$\left.\begin{array}{ll} \delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_{n0} & = 1 \\ a_{11}\delta_1 + a_{21}\delta_2 + ... + a_{n1}\delta_n & = 0 \\ a_{12}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + ... + a_{n2}\delta_n & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{1k}\delta_1 + a_{2k}\delta_2 + ... + a_{nk}\delta_n & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{1,m-1}\delta_1 + a_{2,m-1}\delta_2 + ... + a_{n,m-1}\delta_n & = 0 \\ a_{1,m}\delta_1 + a_{2,m}\delta_2 + ... + a_{n,m}\delta_n & = 0 \end{array}\right\} \quad (1.101)$$

Hệ phương trình trên bao gồm (m+1) phương trình và n ẩn, m là tổng số các biến gốc, n là tổng số các số hạng trong hàm gốc và các điều kiện ràng buộc gốc. n_0 là tổng số các số hạng trong hàm gốc. Theo lí thuyết đại số tuyến tính, nếu n = m + 1, hệ phương trình (1.101) có nghiệm duy nhất. Nếu số biến nhiều hơn số phương trình chẳng hạn n - (m + 1) = r > 0, ta sẽ dùng r biến tự do để biểu thị (m + 1) biến cơ bản. Lúc này, không có nghiệm duy nhất, giải bài toán trên sẽ gặp khó khăn. Ta gọi r là *bậc khó khăn* của hệ phương trình (1.101).

Giả sử nghiệm của hệ phương trình (1.101) là $\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_n^*$. Định lí 1 cho phép thiết lập hệ thức:

$$\min g_0(x) = g_0(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \max v(\delta) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{\delta_1^*}\right)^{\delta_1^*} \left(\frac{C_2}{\delta_2^*}\right)^{\delta_2^*} ... \left(\frac{C_n}{\delta_n^*}\right)^{\delta_n^*} .\lambda_1^{*\lambda_1^*}.\lambda_2^{*\lambda_2^*}...\lambda_p^{*\lambda_p^*} \quad (1.102)$$

Trong đó $(x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc. Các thừa số $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_p^*$ tính theo công thức (1.97):

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^* = \delta_{m_1}^* + \delta_{m_1+1}^* + ... + \delta_{n_1}^* \\ \lambda_2^* = \delta_{m_2}^* + \delta_{m_2+1}^* + ... + \delta_{n_2}^* \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_k^* = \delta_{m_k}^* + \delta_{m_k+1}^* + ... + \delta_{n_k}^* \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_p^* = \delta_{m_p}^* + \delta_{m_p+1}^* + ... + \delta_{n_p}^* \end{array}\right\} \quad (1.103)$$

Một vấn đề lí thú là phương án tối ưu của bài toán gốc có thể suy ra từ phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu bằng các hệ thức sau đây:

$$\min g_o(x).\delta_k^* = C_k.x_1^{*a_{k1}}.x_2^{*a_{k2}}....x_m^{*a_{km}}$$
$$k = 1,2,...n_0 \qquad (1.104)$$

$$\delta_i^* / \delta_k^* = C_i.x_1^{*a_{i1}}.x_2^{*a_{i2}}....x_m^{*a_{im}}$$
$$k = 1,2,...p \qquad (1.105)$$

ứng với $\lambda_k(\delta^*) > 0$; $i = m_k, m_k + 1, m_k + 2... n_k$.

Lấy lôgarit 2 vế của các phương trình (1.104), (1.105) và giải hệ phương trình, ta sẽ được phương án tối ưu của bài toán gốc.

Thí dụ 1.12

Cực tiểu hóa hàm:

$$g_0(x) = 40x_1x_2 + 20x_2x_3 \qquad (a)$$

với điều kiện:

$$g_1(x) = \frac{1}{5}x_1^{-1}.x_2^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}x_2^{-1}.x_3^{-2/3} \le 1 \qquad (b)$$

(1.106)

Bài toán gồm 3 biến gốc x_1, x_2, x_3 ($m = 3$) và 4 số hạng ($n = 4$).

Trong phương trình (1.106a) ($k = 0$, $m_0 = 1$, $n_0 = 2$) ta có:

Ứng với số hạng thứ nhất:

$$C_1 = 40, a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{13} = 0$$

Ứng với số hạng thứ 2:

$$C_2 = 20, a_{21} = 0, a_{22} = 1, a_{23} = 1$$

Trong bất đẳng thức (1.106b) ($k = 1$, $m_1 = 3$, $n_1 = 4$)

Ứng với số hạng thứ 3:

$$C_3 = 1/5, a_{31} = -1, a_{32} = -1/2, a_{33} = 0$$

Ứng với số hạng thứ 4:

$$C_4 = 3/5, a_{41} = 0, a_{42} = -1, a_{43} = -2/3$$

Áp dụng hệ thức (1.102):

$$\min g_o(x) = \max v(\delta) = \left(\frac{40}{\delta_1^*}\right)^{\delta_1^*}.\left(\frac{20}{\delta_2^*}\right)^{\delta_2^*}.\left(\frac{1/5}{\delta_3^*}\right)^{\delta_3^*}.\left(\frac{3/5}{\delta_4^*}\right)^{\delta_4^*}.\lambda_1^{*\lambda_1^*} \qquad (1.107)$$

Trong đó $(\delta_1^*, \delta_2^*, ...\delta_n^*)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Nó là nghiệm của hệ phương trình (1.101).

$$\delta_1 + \delta_2 \qquad\qquad\qquad\qquad = 1$$

$$1.\delta_1 + 0.\delta_2 - 1.\delta_3 + 0.\delta_4 = 0$$

$$1.\delta_1 + 1.\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_3 - 1.\delta_4 = 0$$

$$0.\delta_1 + 1.\delta_2 + 0.\delta_3 - \frac{2}{3}.\delta_4 = 0$$

Vì n = 4, m = 3 ⇒ n = m + 1 nên hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất:

$$\delta_1^* = \frac{1}{2};\ \ \delta_2^* = \frac{1}{2};\ \ \delta_3^* = \frac{1}{2};\ \ \delta_4^* = \frac{3}{4}$$

Căn cứ vào hệ thức (1.103):

$$\lambda_1^* = \delta_3^* + \delta_4^* = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad (m_1 = 3, n_1 = 4)$$

Thay giá trị này vào hệ thức (1.107):

$$\min g_0(x) = \max v(\delta) = \left(\frac{40}{1/2}\right)^{1/2}.\left(\frac{20}{1/2}\right)^{1/2}.\left(\frac{1/5}{1/2}\right)^{1/2}.\left(\frac{3/5}{3/4}\right)^{3/4}.\left(\frac{5}{4}\right)^{5/4} = 40$$

Căn cứ vào hệ thức (1.104), (1.105), ta suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc:

$$\text{Min } g_0(x).\delta_1^* = 40.1/2 = 20 = 40.x_1^1.x_2^1 \qquad \text{(a)}$$

$$\text{Min } g_0(x).\delta_2^* = 40.1/2 = 20 = 20.x_2^1.x_3^1 \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{\delta_3^*}{\lambda_1^*} = \frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5} = \frac{1}{5}x_1^{-1}.x_2^{-1/2} \qquad \text{(c)}$$

$$\frac{\delta_4^*}{\lambda_1^*} = \frac{3/4}{5/4} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}x_2^{-1}.x_3^{-2/3} \qquad \text{(d)}$$

Lấy lôgarit 2 vế của các phương trình (a), (b), (c), (d):

$$\log x_1 + \log x_2 \qquad = -\log 2$$

$$\log x_2 + \log x_3 \qquad = 0$$

$$-\log x_1 - 1/2\log x_2 = \log 2$$

$$-\log x_2 - 2/3\log x_3 = 0$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là: $\log x_1 = -\log x_2$, $\log x_2 = 0$, $\log x_3 = 0$ do đó phương án tối ưu của bài toán gốc là: $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = \left(1/2, 1, 1\right)$.

Thí dụ 1.13.

Cực tiểu hóa hàm:

$$g_o(x) = 3000x_1 + 1732x_2 \qquad (a)$$

với điều kiện:

$$\frac{2000}{69}\left(\frac{3}{x_1} + \frac{\sqrt{3}}{x_2}\right) \leq 3 \qquad (b)$$

Giải :

Bài toán trên đây có thể viết dưới dạng:

Cực tiểu hóa hàm:

$$g_0(x) = 3000.x_1^1.x_2^0 + 1732x_1^0.x_2^1 \qquad (a)$$

với điều kiện: (1.108)

$$g_1(x) = 29.x_1^{-1}.x_2^0 + 16,73.x_1^0.x_2^{-1} \leq 1 \qquad (b)$$

Bài toán này gồm 2 biến gốc x_1, x_2 ($m = 2$) và 4 số hạng ($n = 4$).

Trong phương trình (1.108a) ($m_o = 1$, $n_o = 2$) ta có:

- Ứng với số hạng thứ nhất:

$$C_1 = 3000,\ a_{11} = 1,\ a_{12} = 0$$

- Ứng với số hạng thứ 2:

$$C_2 = 1732,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 1$$

Trong bất đẳng thức (1.108b) ($m_1 = 3$, $n_1 = 4$):

- Ứng với số hạng thứ 3:

$$C_3 = 29,\ a_{31} = -1,\ a_{32} = 0$$

- Ứng với số hạng thứ 4:

$$C_4 = 16{,}73,\ a_{41} = 0,\ a_{42} = -1$$

Từ hệ thức (1.102) ta có:

$$\min g_o(x) = \max v(\delta) = \left(\frac{3000}{\delta_1^*}\right)^{\delta_1^*} . \left(\frac{1732}{\delta_2^*}\right)^{\delta_2^*} . \left(\frac{29}{\delta_3^*}\right)^{\delta_3^*} . \left(\frac{16.73}{\delta_4^*}\right)^{\delta_4^*} .\lambda_1^{*\lambda_1^*} \qquad (1.109)$$

Phương án tối ưu $(\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*, \delta_4^*)$ xác định từ hệ phương trình tuyến tính (1.101):

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 1 & (m_0 = 1, n_0 = 2) \\ 1.\delta_1 + 0.\delta_2 - 1.\delta_3 + 0.\delta_4 = 0 & \text{hay} \\ 0.\delta_1 + 1.\delta_2 + 0.\delta_3 - 1.\delta_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 &= 1 \\ \delta_1 - \delta_3 &= 0 \\ \delta_2 - \delta_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.110)$$

Trong hệ phương trình trên, $n = 4$, $m = 2 \Rightarrow r = n - (m + 1) = 4 - 3 = 1$. Bậc khó khăn bằng

1 nên nghiệm không phải là duy nhất. Ta dùng một biến tự do, chẳng hạn biến δ_2 để biểu thị các biến còn lại:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= 1-\delta_2 \\ \delta_3 &= \delta_1 = 1-\delta_2 \\ \delta_4 &= \delta_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.110a)$$

Căn cứ vào hệ phương trình (1.97) và (1.110a):

$$\lambda_1 = \delta_3 + \delta_4 = 1 \qquad (1.111)$$

Thay các giá trị trên đây vào phương trình (1.96):

$$v(\delta) = v(\delta_2) = \left(\frac{3000}{1-\delta_2^*}\right)^{1-\delta_2^*} \cdot \left(\frac{1732}{\delta_2^*}\right)^{\delta_2^*} \cdot \left(\frac{29}{1-\delta_2^*}\right)^{1-\delta_2^*} \cdot \left(\frac{16,73}{\delta_2^*}\right)^{\delta_2^*}$$

Phương trình trên đây chứa một ẩn. Để có max $v(\delta_2)$, ta triệt tiêu đạo hàm của hàm v đối với biến δ_2, từ đó suy ra phương án tối ưu $\delta_2^* = 0,372$. Thay giá trị này vào hệ phương trình (1.110a) và phương trình (1.111), ta được: $\delta_1^* = 0,628; \delta_3^* = 0,628; \delta_4^* = 0,372; \lambda_1^* = 1;$. Thay các giá trị vừa tính được vào phương trình (1.109), ta được:

$$\min g_0(x) = \max v(\delta) = 217800$$

Phương án tối ưu của bài toán gốc suy ra từ hệ thức (1.104):

$$\min g_0(x).\delta_1^* = 0,628.217800 = 3000.x_1^*$$

$$\min g_0(x).\delta_2^* = 0,372.217800 = 1732.x_2^*$$

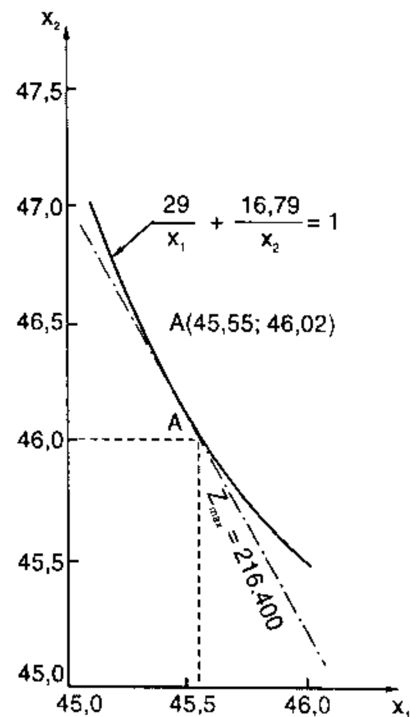
Sau khi giải phương trình trên, ta được:

$$x_1^* = 45,6,\ x_2^* = 46,7$$

Hình (1.11) ghi các kết quả giải theo phương pháp đồ thị. Phương án tối ưu xuất hiện tại điểm tiếp xúc giữa đường

$$\frac{29}{x_1} + \frac{16,73}{x_2} = 1$$

và đường



Hình 1.11

max $g_0(x) = 216400 = 3000x_1 + 1732x_2$; $x_1 = 45,55$; $x_2 = 46,02$, max $g_0(x) = 216400$. Kết quả này khá xấp xỉ với kết quả tính theo phương pháp quy hoạch hình học.

Qua thí dụ (1.13) ta thấy rằng giải bài toán đối ngẫu khá phức tạp ngay khi bậc khó khăn r = 1. Trong thực tế, số điều kiện ràng buộc thường lớn hơn 1 nên có khả năng bậc khó khăn r = n - (m + 1) > 1 do đó giải bài toán đối ngẫu phức tạp hơn nhiều. Đây là nhược điểm cơ bản của phương pháp quy hoạch hình học.

§7. PHƯƠNG PHÁP QUY HOẠCH ĐỘNG

Phương pháp quy hoạch động do Richard Bellman [6] đề ra vào khoảng năm 1950. Nó đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như sản xuất, kinh tế, phương trình đạo hàm riêng, tính kết cấu v.v...

Phương pháp quy hoạch động dựa trên nguyên tắc chia quá trình giải bài toán tối ưu thành nhiều giai đoạn và tiến hành tìm phương án tối ưu qua các giai đoạn khác nhau. Phương án tối ưu toàn bộ sẽ là tổng hợp của các phương án tối ưu cục bộ.

Một thí dụ đơn giản mà ta có thể hình dung được là quá trình thiết kế tối ưu một nhà cao tầng. Vì tải trọng truyền dần từ tầng trên xuống tầng dưới, nên đầu tiên ta chọn kích thước tối ưu cho các kết cấu trong tầng trên cùng. Căn cứ vào các kích thước này, ta tiếp tục chọn kích thước tối ưu cho các kết cấu trong tầng thứ 2 và cứ như vậy tiếp tục làm cho đến tầng dưới cùng.

Sau đây là một thí dụ cụ thể minh họa phương pháp quy hoạch động. Giả sử trên hình (1.12), cac trạm vận chuyển biểu thị bằng các ô vuông a, b, c... Các đường nối liền các trạm là các đường giao thông. Các số ghi trên đường nối liền các trạm biểu thị giá tiền vận chuyển. Giả sử các trạm xuất phát là a, b, c, các trạm đích là k, n, p. Hỏi phải vận chuyển theo con đường nào để tổng giá tiền vận chuyển rẻ nhất? Ta sẽ giải bài toán này qua các giai đoạn sau đây.

Trong giai đoạn đầu tiên, giả sử xuất phát từ các trạm g, h, j để đi đến các trạm k, n, p. Kết quả tính toán ghi trên bảng (1.16)

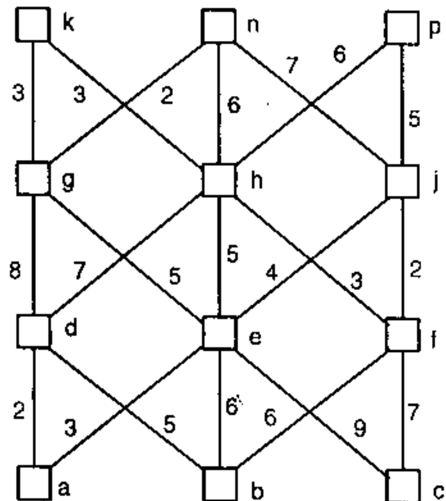
Số nằm trên cột s và hàng r biểu thị giá tiền vận chuyển từ trạm s đến trạm r. So sánh các số trong cột g (bảng 1.16a), ta thấy nếu xuất phát từ trạm g thì đường đi gn là rẻ nhất. Một cách tương tự, các đường đi sau đây là kinh tế nhất: đường hk (nếu xuất phát từ trạm h), đường jp (nếu xuất phát từ trạm j). Trong hai hàng cuối cùng của bảng (1.16a), các kí hiệu bằng chữ biểu thị đường đi kinh tế nhất, các số biểu thị giá tiền vận chuyển tương ứng.

Sang giai đoạn 2, giả sử xuất phát từ các trạm d, e, f để đi đến các trạm g, h, j. Bảng (1.16b) ghi các giá tiền vận chuyển tương ứng $f_2(x)$. Nhìn vào bảng (1.16c), ta thấy các đường đi kinh tế nhất là: dhk (nếu xuất phát từ trạm e), đường fhk (nếu xuất phát từ trạm f). Các giá tiền vận chuyển tương ứng $\Phi_2(x)$ tính theo công thức:

$$\Phi_2(x) = \Phi_1(x) + f_2(x).$$

Chẳng hạn muốn tính giá tiền vận chuyển trên đường đi dgn, ta cộng giá tiền vận chuyển trên đường đi dg là $f_2(x) = 8$ với giá tiền vận chuyển trên đường đi kinh tế nhất gn là $\Phi_1(x) = 2$. Do đó, $\Phi_2(x) = 8 + 2 = 10$. Số này ghi trên hàng cuối cùng của bảng (1.16c).

Sang giai đoạn 3, giả sử xuất phát từ các trạm a, b, c để đi đến các trạm d, e, f. Bảng (1.16d) ghi các giá tiền vận chuyển $f_3(x)$ tương ứng. Nhìn vào bảng (1.16e),



Hình 1.12

ta thấy các đường đi kinh tế nhất là aegn (nếu xuất phát từ trạm a), bfhk (nếu xuất phát từ trạm b), cfhk (nếu xuất phát từ trạm c). Giá rẻ nhất tính theo công thức $\Phi_3(x) = f_3(x) + \Phi_2(x)$. Kết quả ghi trên hàng cuối cùng của bảng (1.16). So sánh các số trên hàng này, ta thấy đường đi aegn là kinh tế nhất. Qua thí dụ này, ta thấy phương án tối ưu toàn bộ là tổng hợp của các phương án tối ưu cục bộ.

Bảng 1.16

Từ	g	h	j	đến	
	3	3	-	k	
	2	6	7	n	(a)
	-	6	5	p	
	gn	hk	jp		
Giá rẻ nhất $\Phi_1(x)$	2	3	5		kết thúc giai đoạn 1
Từ	d	e	f	đến	
	8	5	-	g	
Giá $f_2(x)$	7	5	3	h	(b)
	-	4	2	j	
Từ	d	e	f	đến	
	10	7	-	gn	
$f_2(x) + \Phi_1(x)$	10	8	6	hk	(c)
	-	9	7	jp	
	dgn dhk	egn	fhk		
Giá rẻ nhất $\Phi_2(x)$	10	7	6		Kết thúc giai đoạn 2
Từ	a	b	c	đến	
	2	5	-	d	
Giá $f_3(x)$	3	6	9	e	(d)
	-	6	7	f	
Từ	a	b	c	đến	
	12	15	-	dgn dhk	
$f_3(x) + \Phi_2(x)$	10	13	16	egn	(e)
	-	12	13	fhk	
	aegn	bfhk	cfhk		
Giá rẻ nhất $\Phi_3(x)$	10	12	13		Kết thúc giai đoạn 3

Chương hai
BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC

Trong chương một, các bài toán tối ưu đã được trình bày dưới dạng tổng quát trong đó hàm mục tiêu và các biến là những đại lượng bất kì.

Trong tính toán kết cấu, hàm mục tiêu thường biểu thị các đại lượng cần được cực tiểu hóa như trọng lượng, thể tích kết cấu, giá cả vật liệu v.v... Các điều kiện ràng buộc dưới dạng đẳng thức thường là các điều kiện cân bằng, các điều kiện biến dạng liên tục. Các điều kiện ràng buộc dưới dạng bất đẳng thức thường là các điều kiện về độ bền, độ cứng, các điều kiện chảy dẻo v.v...

Dạng hàm mục tiêu và dạng điều kiện ràng buộc thay đổi tùy theo loại kết cấu và phương pháp tính. Do đó, bài toán tối ưu và phương pháp giải có những đặc điểm khác nhau khi áp dụng các phương pháp tính khác nhau.

Chương này giới thiệu các bài toán tối ưu tính hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh theo phương pháp lực. Nội dung sẽ được trình bày dưới dạng ma trận.

Trước hết, ta hãy làm quen với dạng ma trận của phương pháp lực.

§1. DẠNG MA TRẬN CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

§1.1. Một số nguyên tắc chung

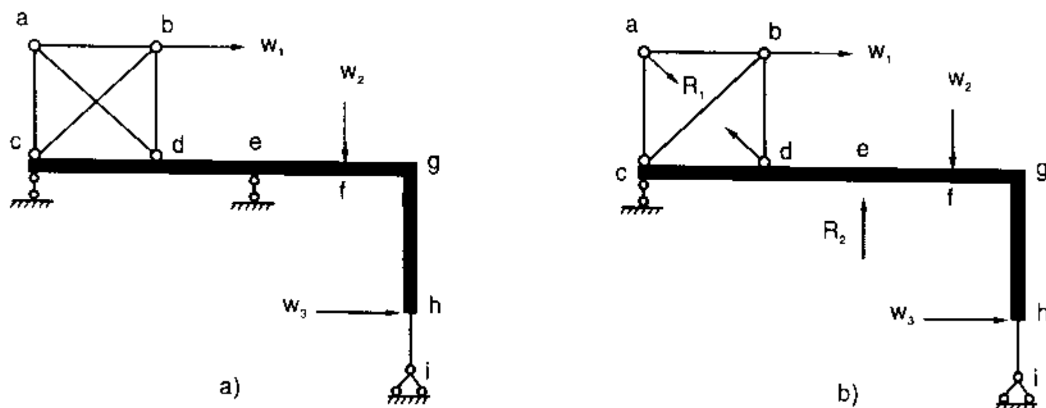
Dạng ma trận của phương pháp lực xuất phát từ những giả thiết và nguyên tắc sau đây:

1. Tải trọng là các lực tập trung.

2. Chia kết cấu thành các phân tử riêng biệt giới hạn bởi các điểm chia gọi là nút. Nút là điểm đặt lực chẳng hạn các điểm b, h, f (hình 2.1); điểm tại đó trục thay đổi hướng chẳng hạn các điểm a, b, c, d, g; điểm gối tựa chẳng hạn các điểm c, i; điểm có liên kết thừa trong hệ siêu tĩnh chẳng hạn điểm e.

3. Đối với hệ siêu tĩnh, thành lập hệ cơ bản bằng cách vứt bỏ các liên kết thừa và thay vào đó bằng các lực chưa biết R_1, R_2,... R_n (hình 2.1b).

Sau đây, ta sẽ thành lập một số công thức cơ bản áp dụng cho hệ siêu tĩnh. Hệ tĩnh định có thể xem là trường hợp riêng của hệ siêu tĩnh.



Hình 2.1

§1.2. Công thức tính nội lực và biến dạng

Như trên đã trình bày, để tính hệ siêu tĩnh, ta thành lập hệ cơ bản tương ứng. Giả sử hệ có n liên kết thừa và chịu tác dụng của m tải trọng tập trung.

Ta có:

Vectơ tải trọng

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \tag{2.1}$$

Vectơ lực liên kết thừa

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\} \tag{2.2}$$

Gọi:

$\mathbf{S}_o$ - vectơ nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

$\mathbf{S}_R$ - vectơ nội lực do các liên kết thừa gây ra trong hệ cơ bản.

Ta có:

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{B}_o\mathbf{P} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{S}_R = \mathbf{B}_1\mathbf{R} \tag{2.4}$$

Trong đó

$\mathbf{B}_o$, $\mathbf{B}_1$ - ma trận ảnh hưởng nội lực trong hệ cơ bản ứng với **P** và **R**.

Vậy vectơ nội lực trong hệ siêu tĩnh:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_o\mathbf{P} + \mathbf{B}_1\mathbf{R} \tag{2.5}$$

Vectơ biến dạng trong hệ siêu tĩnh

$$\mathbf{U} = \mathbf{f}.\mathbf{S} = \mathbf{f}(\mathbf{B}_o\mathbf{P} + \mathbf{B}_1\mathbf{R}) \tag{2.6}$$

f- ma trận độ mềm.

Trong bài toán tối ưu, **R** trong công thức (2.4) và (2.6) là những đại lượng cần tìm sao cho vừa thỏa mãn các điều kiện về độ bền, độ cứng, vừa thỏa mãn các điều kiện biến dạng liên tục.

§1.3. Công thức tính chuyển vị tại các nút - Điều kiện biến dạng liên tục

Gọi chuyển vị trên phương các ngoại lực **P** là $\mathbf{X_p}$ và chuyển vị trên phương các lực liên kết thừa là $\mathbf{X_R}$.

Để tìm chuyển vị $\mathbf{X_p}$, ta tạo ra một trạng thái giả tạo trên hệ cơ bản bằng cách vứt bỏ toàn bộ các lực **P**, **R** và đặt vào các điểm đặt lực **P** những tải trọng giả tạo $\mathbf{\overline{P}}$ có giá trị bất kì.

Gọi trạng thái thực là trạng thái của hệ siêu tĩnh đã cho, $\mathbf{\overline{S}_p}$ là nội lực trong hệ cơ bản do các tải trọng giả tạo $\mathbf{\overline{P}}$ gây ra. Theo công thức (2.3) ta có:

$$\mathbf{\overline{S}_p = B_o\overline{P}}$$

Áp dụng nguyên lí công khả dĩ, ta có:

$$\mathbf{\overline{P}'.X_p = \overline{S}'_p.U}$$

Trong đó, vế trái biểu thị công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái giả tạo trên những chuyển dời khả dĩ ở trạng thái thực; vế phải biểu thị công khả dĩ của các nội lực ở trạng thái giả tạo trên những chuyển dời khả dĩ ở trạng thái thực.

Nhưng $\mathbf{\overline{S}_p = B_o\overline{P} \Rightarrow \overline{P}'.X_p = \overline{P}'.B'_o.U}$

Vì $\mathbf{\overline{P}}$ có giá trị bất kì nên

$$\mathbf{X_p = B'_o.U} \qquad (2.7)$$

Thay **U** bằng hệ thức (2.6)

$$\mathbf{X_p = B'_o(f.B_oP + f.B_1.R)} \text{ hay}$$

$$\mathbf{X_p = B'_of.B_o.P + B'_ofB_1.R} \qquad (2.8)$$

Để tìm $\mathbf{X_R}$, ta tạo ra trạng thái giả tạo trên hệ cơ bản bằng cách vứt bỏ toàn bộ các lực **P**, R và đặt vào điểm đặt của các lực **R** những lực giả tạo $\mathbf{\overline{R}}$ có giá trị bất kì. Gọi $\mathbf{\overline{S}_R}$ là nội lực trong hệ cơ bản do $\mathbf{\overline{R}}$ gây ra. Từ công thức (2.4) ta có $\mathbf{\overline{S}_R=B_1.\overline{R}}$

Áp dụng nguyên lí công khả dĩ tương tự như trên:

$\mathbf{\overline{R}'.X_R = \overline{S}'_R.U}$ nhưng $\mathbf{\overline{S}_R=B'_1.\overline{R}}$ nên

$\mathbf{\overline{R}'.X_R = \overline{R}'.B'_1.U}$ hay $\mathbf{X_R = B'_1.U}$. Thay **U** bằng hệ thức (2.6):

$$\mathbf{X_R = B'_1.(fB_oP + fB_1R)} \text{ hay}$$

$$\mathbf{X_R = B'_1.f.B_oP + B'_1.f.B_1.R} \qquad (2.9)$$

Vì trong hệ thực $\mathbf{X_R = 0}$ nên

$$\mathbf{B'_1.f.B_o.P + B'_1.f.B_1R = 0} \qquad (2.10)$$

Phương trình (2.10) gọi là phương trình cơ bản của phương pháp lực hoặc còn gọi là *điều kiện biến dạng liên tục.*

Đối với *hệ tĩnh định*, vì **R** = 0 nên ta suy ra:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B_o}.\mathbf{P} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{f}.\mathbf{S} = \mathbf{f}.\mathbf{B_o}\mathbf{P} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{X_p} = \mathbf{F}.\mathbf{P} \tag{2.13}$$

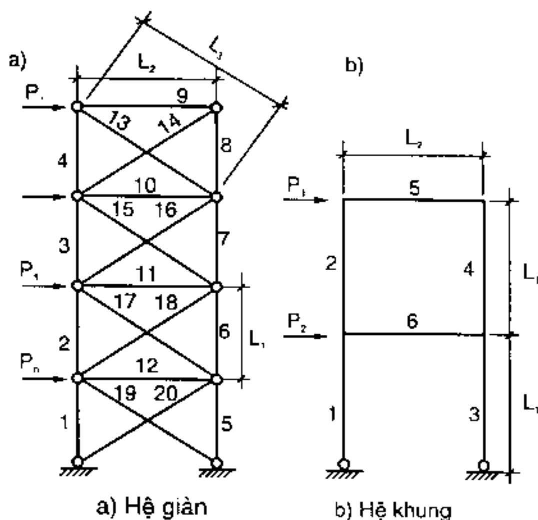
Trong đó:
$$\mathbf{F} = \mathbf{B'_o}.\mathbf{f}.\mathbf{B_o} \tag{2.14}$$

F gọi là *ma trận độ mềm tổng thể* của hệ tĩnh định.

§2. HÀM MỤC TIÊU

Như đã trình bày, hàm mục tiêu thường biểu thị các đại lượng như thể tích, trọng lượng kết cấu, giá cả vật liệu v.v...

Trong thực tế, để tiện cho việc chế tạo và giảm giá thành sản phẩm, thường kết cấu được chia thành nhiều nhóm cấu kiện. Các cấu kiện trong mỗi nhóm có diện tích tiết diện như nhau. Chẳng hạn kết cấu trên hình (2.2a) chia thành 3 nhóm: nhóm 1 bao gồm các xà 9, 10, 11, 12, diện tích tiết diện A_1; nhóm 2 bao gồm các cột 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, diện tích tiết diện A_2; nhóm 3 bao gồm các thanh chéo 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, diện tích tiết diện A_3. Kết cấu trên hình (2.2b) chia thành 2 nhóm: nhóm các xà 5, 6 và nhóm các cột 1, 2, 3, 4. Diện tích tiết diện cột chọn như nhau vì tải trong gió có thể đổi hướng (trái sang phải hoặc phải sang trái).



Hình 2.2

Bài toán tối ưu tính kết cấu sẽ được xây dựng trên nguyên tắc chia nhóm trên đây.

Giả sử một kết cấu chia thành G nhóm, một nhóm bất kì kí hiệu là nhóm g. Trong mỗi nhóm, cấu kiện đầu tiên có số thứ tự là I, cấu kiện cuối cùng có số thứ tự là I'. Gọi tổng chiều dài của các cấu kiện trong nhóm g là L_g, diện tích trong nhóm g là A_g. Vậy thể tích kết cấu:

$$V = \sum_{g=1}^{G} L_g A_g \tag{2.15}$$

Trọng lượng kết cấu:

$$T = \sum_{g=1}^{G} \gamma_g . L_g . A_g \tag{2.16}$$

γ_g- tỉ trọng vật liệu trong nhóm g.

Giá vật liệu kết cấu

$$C = \sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g L_g A_g \tag{2.17}$$

C_g- giá vật liệu trên đơn vị trọng lượng

Hàm C trong phương trình (2.17) gọi là hàm mục tiêu hoặc hàm giá cả.

Khi giá vật liệu không thay đổi từ nhóm này sang nhóm khác, ta chọn hàm T (hàm trọng lượng) trong phương trình (2.16) làm hàm mục tiêu.

Khi kết cấu chế tạo bằng một loại vật liệu như nhau (tỉ trọng, giá cả như nhau) ta chọn hàm V (hàm thể tích) trong phương trình (2.15) làm hàm mục tiêu.

Chẳng hạn trên hình (2.2a), các hàm mục tiêu biểu thị như sau:

Có 3 nhóm nên G = 3: nhóm 1 gồm các cột có số thứ tự từ 1 đến 8; nhóm 2 gồm các xà có số thứ tự từ 9 đến 12; nhóm 3 gồm các thanh chéo có số thứ tự từ 13 đến 20. Vậy hàm thể tích:

$$V = \sum_{g=1}^{3} L_g A_g = \sum_{i=1}^{8} L_i A_i + \sum_{i=9}^{12} L_i A_i + \sum_{i=13}^{20} L_i A_i \text{ hay}$$

$$V = 8L_1A_1 + 4L_2A_2 + 8L_3A_3$$

Hàm giá cả

$$C = \sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g L_g A_g = \sum_{i=1}^{8} C_i \gamma_i L_i A_i + \sum_{i=9}^{12} C_i \gamma_i L_i A_i + \sum_{i=13}^{20} C_i \gamma_i L_i A_i$$

hay

$$C = 8C_1\gamma_1L_1A_1 + 4C_2\gamma_2L_2A_2 + 8C_3\gamma_3L_3A_3.$$

Đối với kết cấu trên hình (2.2b), ta suy ra một cách tương tự:

$$C = \sum_{g=1}^{2} C_g \gamma_g L_g A_g = 4C_1\gamma_1L_1A_1 + 2C_2\gamma_2L_2A_2$$

Trong các hàm mục tiêu trên đây, biến là diện tích tiết diện A_g. Như sau này ta sẽ thấy, trong các điều kiện ràng buộc về độ bền và độ cứng, còn có những biến khác như mô men quán tính tiết diện I_g, mô men chống uốn W_g. Nếu bài toán tối ưu gồm nhiều biến, ta nên tìm cách đưa về ít biến để việc tính toán được đơn giản. Chẳng hạn, khi chỉ dùng một biến A_g, ta sẽ quy đổi các biến I_g và W_g thành biến A_g. Nếu chỉ dùng một biến I_g ta quy đổi các biến A_g và W_g thành biến I_g.

Nhìn vào các bảng đặc trưng hình học của tiết diện, ta không thể phát hiện quy luật về mối quan hệ giữa chúng. Song, nếu lấy lôgarit các đại lượng đó, ta sẽ phát hiện một quy luật tuyến tính. Templeman (9) đã làm như vậy đối với các dầm phổ dụng và đã suy ra các hệ thức:

$$\left.\begin{aligned} A &= 0,78W^{2/3} \\ A &= 0,559I^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Đối với hệ khung, áp dụng các hệ thức trên đây vào các phương trình (2.15), (2.16), (2.17), ta có:

$$\left.\begin{aligned}
V &= 0,559\sum_{g=1}^{G} L_g I_g^{1/2} && \text{(a)}\\
T &= 0,559\sum_{g=1}^{G} \gamma_g L_g I_g^{1/2} && \text{(b)}\\
C &= 0,559\sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g L_g I_g^{1/2} && \text{(c)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Nếu chọn I_g làm biến, rõ ràng là các hàm mục tiêu trên đây trở thành phi tuyến. Nếu chọn A làm biến, các hàm mục tiêu có dạng tuyến tính (xem các phương trình (2.15), (2.16), (2.17) nhưng các điều kiện ràng buộc lại trở thành phi tuyến vì:

$$\left.\begin{aligned}
I &= 3,2A^2\\
W &= 1,451A^{3/2}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.18a)$$

Hệ thức (2.18a) suy ra từ hệ thức (2.18). Nếu chọn I làm biến, hàm mục tiêu có dạng phi tuyến (xem các phương trình (2.19) và các điều kiện ràng buộc cũng có dạng phi tuyến vì

$$\left.\begin{aligned}
A &= 0,559I^{1/2}\\
W &= 0,6071I^{3/4}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.18b)$$

Trong phần sau, ta sẽ giả thiết rằng các biến A, I, W là những đại lượng liên tục. Thực ra, chúng có tính chất rời rạc, gián đoạn như ta sẽ thấy trong phần cuối của chương sau.

§3. BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH GIÀN TĨNH ĐỊNH

Giả sử có một giàn tĩnh định như trên hình (2.3a). Có m tải trọng và n phần tử.

Vectơ tải trọng

$$P = \{P_1\ P_2 ...\ P_m\}$$

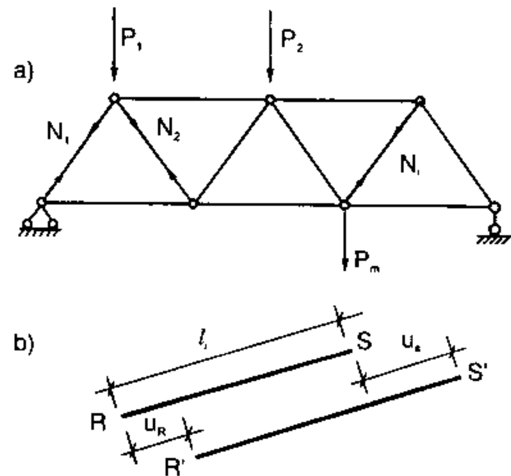
Vectơ nội lực

$$S = \{N_1, N_2, ...\ N_n\}$$

Trong đó, N_1, N_2... là lực dọc trong các thanh giàn. Ta quy ước lực kéo là dương, lực nén là âm.

Áp dụng hệ thức (2.11) $\mathbf{S = B_0 P}$ hay

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1\\ N_2\\ \cdots\\ N_i\\ \cdots\\ N_n \end{bmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m}\\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ B_{i1} & B_{i2} & \cdots & B_{im}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nm} \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} P_1\\ P_2\\ \dots\\ P_i\\ \dots\\ P_m \end{bmatrix}}_{P} \qquad (2.20)$$



Hình 2.3

Trong phương trình ma trận trên, $\mathbf{B}_{ij}$ là các phần tử của ma trận ảnh hưởng nội lực ứng với tải trọng **P**. Để đơn giản, ta thay $\mathbf{B}_0$ bằng **B**.

Căn cứ vào yêu cầu về độ bền, ứng suất trong mỗi thanh giàn phải thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{N_i}{A_i} = \sigma_i \le \sigma_i^* \qquad (2.21)$$

Trong đó: A_i, σ_i^* là diện tích tiết diện và ứng suất cho phép trong thanh thứ i.

Điều kiện (2.21) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{a.\,S = a.\,B.\,P} \le \sigma^* \qquad (2.22)$$

Trong đó, **a** là ma trận chéo

$$\begin{bmatrix} 1/A_1 & & & & & & \\ & 1/A_2 & & & O & & \\ & & 1/A_3 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & 1/A_i & & \\ & & O & & & \dots & \\ & & & & & & 1/A_n \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

σ^* là ứng suất cho phép.

Đối với thanh bất kì thứ i, điều kiện bền là:

$$\sigma_i \le \frac{D_i}{A_i} \le \sigma_i^* \qquad (2.24)$$

D_i là kết quả của phép nhân hàng i của ma trận **B** với vectơ tải trọng **P**.

Gọi X_p là vectơ chuyển vị tại các điểm đặt tải trọng. Áp dụng các công thức (2.13) và (2.14):

$$\mathbf{X_p = F.\,P} \qquad (2.25)$$

$$\mathbf{F = B'.\,f.\,B} \qquad (2.26)$$

Trong đó: **f** là ma trận độ mềm; **F** là ma trận độ mềm tổng thể của giàn.

Vì nội lực trong giàn là các lực dọc nên ma trận độ mềm **f** là một ma trận chéo

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} l_1/A_1E_1 & & & O \\ & l_2/A_2E_2 & & \\ & & \dots & \\ O & & & l_n/A_nE_n \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

Trong đó: l_i, E_i lần lượt là chiều dài và mô duyn đàn hồi của thanh thứ i.

Để bảo đảm yêu cầu về độ cứng, chuyển vị tại các điểm đặt tải trọng không được vượt quá chuyển vị cho phép:

$$\mathbf{X_p = F.P = B'.fB.P} \le \Delta \tag{2.28}$$

Trong đó, Δ là vectơ chuyển vị cho phép.

Trong thực tế, thường chỉ đòi hỏi chuyển vị tại một điểm nào đó không được vượt quá chuyển vị cho phép. Chẳng hạn, muốn kiểm tra chuyển vị y_j tại điểm đặt lực P_j, sau khi nhân hàng thứ j của ma trận **F** trong vế trái của bất đẳng thức (2.28) với vectơ P, ta có:

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} / A_i \le \Delta_j \tag{2.29}$$

Trong đó Δ_j là chuyển vị cho phép tại điểm đặt lực P_j. Áp dụng nguyên lí công khả dĩ, ta cũng có thể suy ra điều kiện tương tự với bất đẳng thức (2.29):

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} N_i \bar{N}_i l_i / E_i A_i \le \Delta_j \tag{2.30}$$

Trong đó:

l_i- chiều dài thanh thứ i;

E_i- mô đuyn đàn hồi;

N_i- lực dọc trong thanh thứ i do tải trọng gây ra;

$\bar{N}_i$ - lực dọc trong thanh thứ i do tải trọng giả tạo K = 1 đặt tại điểm đặt lực P_j gây ra.

Khi không cần thỏa mãn yêu cầu về độ cứng, bài toán tối ưu rất đơn giản. Căn cứ vào giá trị nội lực và ứng suất cho phép, có thể xác định được dễ dàng tiết diện tối ưu. Song khi cần bảo đảm yêu cầu về độ cứng (thông thường độ cứng quyết định kích thước của giàn), bài toán tối ưu trở nên phức tạp. Lúc đó, ta xác định diện tích tiết diện A_i theo yêu cầu về độ bền và chọn ra các cận dưới của A_i. Căn cứ vào phương trình (2.17), điều kiện (2.29) và chú ý đến tính chất phân nhóm, bài toán tối ưu tính giàn tĩnh định có dạng như sau:

Cực tiểu hóa hàm

$$C = \sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g l_g A_g$$

Với điều kiện

$$\sum_{g=1}^{G} 1 / A_g \sum_{i=1}^{I'} a_{ij} \le \Delta_j$$
$$A_g \ge b_g \tag{2.31}$$

b_g- cận dưới của diện tích A_g (ứng với nhóm g).

Bài toán quy hoạch phi tuyến trên đây có thể giải theo phương pháp quy hoạch hình học (xem §6 chương một) hoặc phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu (xem §5.2 chương một).

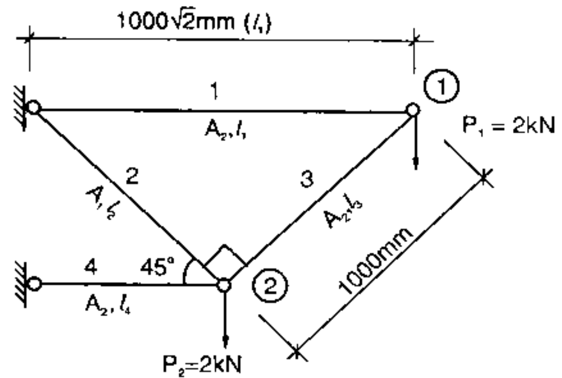
Thí dụ 2.1.

Cho một giàn tĩnh định như trên hình (2.4). Các thanh 1, 2 thuộc nhóm diện tích A_1, các thanh 3, 4 thuộc nhóm diện tích A_2. Giàn làm bằng một loại vật liệu, mô đuyn đàn hồi E = 207kN/mm². Ứng suất kéo cho phép $\sigma_k^* = 0{,}15\text{kN/mm}^2$, ứng suất nén cho phép $\sigma_n^* = 0{,}1\text{kN/mm}^2$. Chuyển

vị tại điểm đặt lực P_1 không được vượt quá 1,6mm.

Giải

Trước hết, ta hãy tìm ma trận ảnh hưởng B. Lần lượt đặt các tải trọng $P_1 = 1$ và $P_2 = 1$ lên giàn và tiến hành tính nội lực trong giàn theo phương pháp tách nút hoặc phương pháp mặt cắt.



Hình 2.4

Khi $P_1 = 1$ (hình 2.5a)

$N_1 = 1$; $N_2 = \sqrt{2}$; $N_3 = -\sqrt{2}$; $N_4 = -2$

Khi $P_2 = 1$ (hình 2.5b)

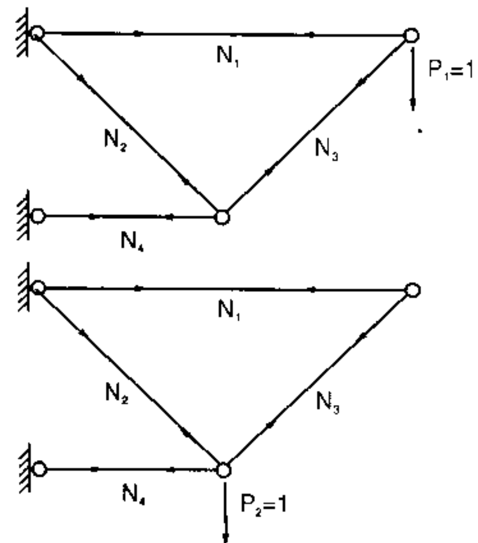
$N_1 = 0$; $N_2 = \sqrt{2}$; $N_3 = 0$; $N_4 = -1$

Áp dụng nguyên lí cộng tác dụng, ta có:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 1.P_1 + 0.P_2 \\ N_2 &= \sqrt{2}.P_1 + \sqrt{2}.P_2 \\ N_3 &= -\sqrt{2}.P_1 + 0.P_2 \\ N_4 &= -2.P_1 - 1.P_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Biểu thị (a) dưới dạng ma trận

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{B} . \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_{P}$$



Hình 2.5

Ma trận ảnh hưởng nội lực B có dạng:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ mềm f (xem hệ thức 2.27) có dạng:

$$f = \begin{bmatrix} l_1/EA_1 & & & O \\ & l_2/EA_1 & & \\ & & l_3/EA_2 & \\ O & & & l_4/EA_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1414/EA_1 & & & O \\ & 1000/EA_1 & & \\ & & 1000/EA_2 & \\ O & & & 707/EA_2 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân ma trận

$$f.B = \begin{bmatrix} \frac{1414}{EA_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1000}{EA_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1000}{EA_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{707}{EA_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 1/E. \begin{bmatrix} \frac{1414}{A_1} & 0 \\ \frac{1414}{A_1} & \frac{1414}{A_1} \\ \frac{-1414}{A_2} & 0 \\ \frac{-1414}{A_2} & \frac{-707}{A_2} \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức (2.26)

$$F = B'.f.B = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1414}{A_1} & 0 \\ \frac{1414}{A_1} & \frac{1414}{A_1} \\ \frac{-1414}{A_2} & 0 \\ \frac{-1414}{A_2} & \frac{-707}{A_2} \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 3414/A_1 + 4828/A_2 & 2000/A_1 + 1414/A_2 \\ 2000/A_1 + 1414/A_2 & 2000/A_1 + 707/A_2 \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức (2.28):

$$\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = F.P$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 3414/A_1 + 4828/A_2 & 2000/A_1 + 1414/A_2 \\ 2000/A_1 + 1414/A_2 & 2000/A_1 + 707/A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nhân hàng thứ nhất của ma trận F với vectơ P:

$$y_1 = \frac{2}{E}\left(\frac{3414}{A_1} + \frac{4828}{A_2}\right) + \frac{2}{E}\left(\frac{2000}{A_1} + \frac{1414}{A_2}\right) = \frac{2}{E}\left(\frac{5414}{A_1} + \frac{6242}{A_2}\right)$$

Theo yêu cầu của bài toán, ta có điều kiện ràng buộc về độ cứng:

$$y_1 = \frac{2}{E}\left(\frac{5414}{A_1} + \frac{6242}{A_2}\right) \leq 1,6 \qquad (2.32)$$

Căn cứ vào điều kiện độ bền, ta có:

$$N_1 = 1.2 = 2kN \Rightarrow A_1^{'} = N_1 / \sigma_{1k}^{*} = 2/0,15 = 13,33mm^2 \text{ (kéo)}$$

$$N_2 = \sqrt{2}.2 + \sqrt{2}.2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow A_2^{'} = N_2 / \sigma_{2k}^{*} = 4\sqrt{2}/0,15 = 37,75mm^2 \text{ (kéo)}$$

$$N_3 = -\sqrt{2}.2 \Rightarrow A_3^{'} = N_3 / \sigma_{3n}^{*} = 2\sqrt{2}/0,1 = 28,28mm^2 \text{ (nén)}$$

$$N_4 = -2.2 - 1.2 = -6 \Rightarrow A_4^{'} = N_4 / \sigma_{4n}^{*} = 6/0,1 = 60mm^2 \text{ (nén)}$$

Vì các thanh 1, 2 thuộc nhóm diện tích A_1 nên ta chọn cận dưới của A_1 là $37,75mm^2$. Các thanh 3, 4 thuộc nhóm diện tích A_2 nên ta chọn cận dưới của A_2 là $60mm^2$. Chọn diện tích như trên không những bảo đảm độ bền mà còn thiên về an toàn. Thay các giá trị trên vào vế trái điều kiện (2.32), ta có:

$$y_1 = 3,29mm > 1,6mm \text{ (không cho phép).}$$

Vậy để bảo đảm yêu cầu về độ bền và độ cứng, điều kiện (2.32) phải được thỏa mãn với điều kiện $A_1 \geq 37,75$; $A_2 \geq 60$.

Vì giàn làm bằng một loại vật liệu, ta chọn hàm thể tích (phương trình (2.15)) làm hàm mục tiêu. Theo đầu đề, ta có 2 nhóm cấu kiện (G = 2) nên

$$V = \sum_{g=1}^{2} L_g A_g = A_1 \sum_{i=1}^{2} L_i + A_2 \sum_{i=1}^{4} L_i \Rightarrow V = \left(1000\sqrt{2} + 1000\right) A_1 + \left(1000 + 500\sqrt{2}\right) A_2$$

hay

$$V = 2414A_1 + 1707A_2$$

Đặt $V = Z$, $A_1 = x_1$, $A_2 = x_2$. Căn cứ vào điều kiện (2.32) và các kết quả trên đây, ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa hàm

$$Z = 2414x_1 + 170x_2 \qquad (a)$$

với điều kiện

$$2/E(5414/x_1 + 6242/x_2) \leq 1,6 \qquad (b)$$

$$x_1 \geq 37,75 \; ; \; x_2 \geq 60 \qquad (c)$$

(2.33)

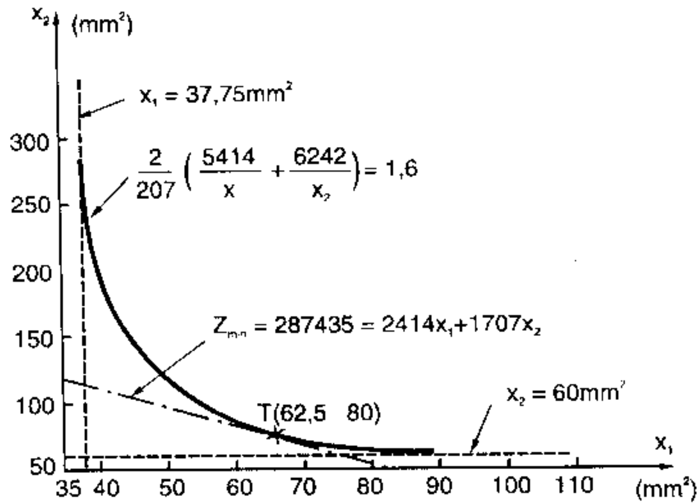
Bài toán trên có dạng phi tuyến trong đó hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc là những đa thức, mỗi số hạng của đa thức là tích của các biến mang số mũ. Có thể giải bằng phương pháp quy hoạch hình học như đã trình bày trong mục §6 chương một. Song vì bài toán có 2 biến, có thể giải theo phương pháp đồ thị.

Trên hình (2.6) ta thấy đường mức $Z_{min} = 287435mm^3$ tiếp xúc với đường biên ứng với điều kiện tới hạn (2.33b) tại điểm T. Tại đó, ta có phương án tối ưu: $x_1 = A_1 = 62,5mm^2$,

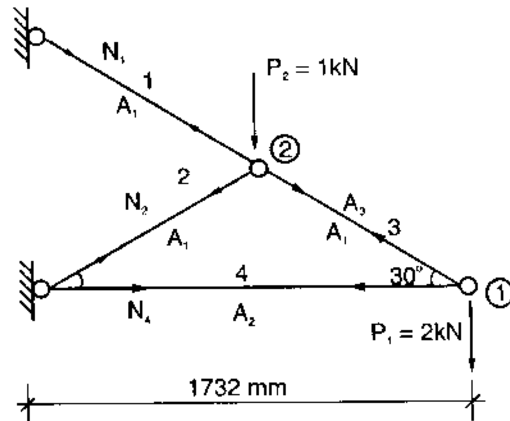
$x_2 = A_2 = 80mm^2$, thể tích kết cấu $Z_{min} = V_{min} = 287435mm^3$.

Thí dụ 2.2

Cho một giàn tĩnh định như trên hình (2.7). Các thanh 1, 2, 3 thuộc nhóm diện tích A_1, thanh 4 thuộc nhóm diện tích A_2. Chiều dài các thanh biểu thị trên hình vẽ. Chuyển vị cho phép tại nút, bằng 3mm. Ứng suất kéo cho phép $\sigma_k^* = 0{,}16kN/mm^2$, ứng suất nén cho phép $\sigma_n^* = 0{,}10kN/mm^2$. Mô đuyn đàn hồi $E = 207kN/mm^2$.



Hình 2.6



Hình 2.7

Giải.

Để tìm ma trận ảnh hưởng nội lực B, ta lần lượt đặt lực $P_1 = 1$ và $P_2 = 1$ lên giàn tương tự như đã làm trong thí dụ (2.1). Theo kết quả tính toán:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận ảnh hưởng nội lực

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ mềm

$$f = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} \frac{1000}{A_1} & & & O \\ & \frac{1000}{A_1} & & \\ & & \frac{1000}{A_1} & \\ O & & & \frac{17232}{A_2} \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận độ mềm tổng thể:

$$F = B^t.f.B = \frac{1000}{E}\begin{bmatrix} 8/A_1 + 3\sqrt{3}/A_2 & 2/A_1 \\ 2/A_1 & 2/A_1 \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức (2.28):

$$X_p = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 8/A_1 + 3\sqrt{3}/A_2 & 2/A_1 \\ 2/A_1 & 2/A_1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Trong đó y_1, y_2 là chuyển vị trên phương thẳng đứng tại các nút 1 và 2 (hình 2.7). Thay $P_1 = 2kN$, $P_2 = 1kN$, $E = 207kN/mm^2$ vào phương trình ma trận trên và thực hiện phép nhân ma trận, ta được:

$$y_1 = \frac{2000}{69}\left(\frac{3}{A_1} + \frac{\sqrt{3}}{A_2}\right) \leq 3mm \qquad (2.34)$$

Căn cứ vào yêu cầu độ bền, sau khi tính toán tương tự như đã trình bày trong thí dụ (2.1), ta được cận dưới tương ứng của các thanh: $A_1' = 31,25mm^2$; $A_2' = 10,00mm^2$; $A_3' = 25,00mm^2$; $A_4' = 34,65mm^2$.

Vì các thanh 1, 2, 3 thuộc nhóm diện tích A_1, thanh 4 thuộc nhóm diện tích A_2 nên ta lấy

$$A_1 \geq 31,25mm^2,\ A_2 \geq 34,65mm^2$$

Vì giàn làm bằng một loại vật liệu, hàm mục tiêu là hàm thể tích (xem phương trình (2.15)):

$$V = \sum_{g=1}^{2} L_g A_g = A_1 \sum_{i=1}^{3} L_i + A_2 L_4$$

$$V = 3000A_1 + 1732A_2$$

Đặt $V = Z$, $A_1 = x_1$, $A_2 = x_2$. Căn cứ vào các kết quả trên và điều kiện (2.34), ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa hàm

$$Z = 3000x_1 + 1732x_2$$

với điều kiện

$$\frac{2000}{69}\left(\frac{3}{x_1} + \frac{\sqrt{3}}{x_2}\right) \leq 3$$

$$x_1 \geq 31,25,\ x_2 \geq 34,65$$

Bài toán này đã được giải theo phương pháp quy hoạch hình học trong thí dụ (1.13) chương một. Kết quả tính toán cho phương án tối ưu: $x_1 = A_1 = 45,6mm^2$, $x_2 = A_2 = 46,7mm^2$, $\min Z = \min V = 217800mm^3$.

Thí dụ 2.3

Đầu đề giống thí dụ (2.1) nhưng bổ sung thêm điều kiện $y_1 - y_2 \leq 0{,}6$mm

Giải

Sau khi bổ sung điều kiện trên vào bài toán tối ưu trong thí dụ (2.1), ta có bài toán mới:

Cực tiểu hóa hàm

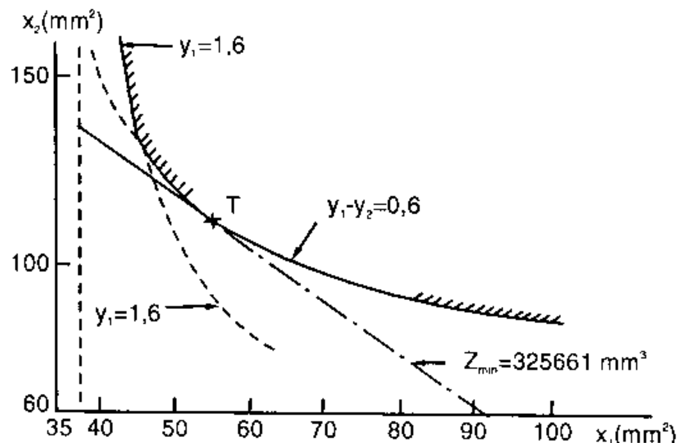
$Z = 2414x_1 + 1707x_2$

với điều kiện

$$y_1 = \frac{2}{E}\left(\frac{5414}{x_1} + \frac{6242}{x_2}\right) \leq 1{,}6$$

$$y_1 - y_2 = \frac{2}{E}\left(\frac{1414}{x_1} + \frac{4121}{x_2}\right) \leq 0{,}6$$

$x_1 \geq 37{,}75 \quad x_2 \geq 60$



Hình 2.8

Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (2.8). Đường mức $Z_{min} = 325661$mm² tiếp xúc với đường biên của miền nghiệm tại điểm T. Tại đó $x_1 = 55$mm², $x_2 = 118$mm². Vậy phương án tối ưu là: $A_1 = 55$mm²< $A_2 = 118$mm², min V = 325661mm³.

§4. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA TỪNG MẪU ÁP DỤNG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH GIÀN TĨNH ĐỊNH

Bài toán quy hoạch phi tuyến có dạng tổng quát (2.31) trình bày trong phần trước là bài toán có biến tách rời nên có thể giải theo phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu.

Tuy nhiên, cần lưu ý một điều là khi giải theo phương pháp gần đúng tuyến tính hóa từng mẫu, phương án tối ưu gần đúng cục bộ cũng sẽ là phương án tối ưu toàn bộ của bài toán gốc phi tuyến chỉ khi nào hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc đều là những hàm lồi. Những khái niệm này đã được trình bày trong §5 chương một. Trong bài toán tối ưu (2.31), ta nhận thấy hàm mục tiêu C là một hàm lồi vì nó có dạng tuyến tính. Điều kiện ràng buộc là hàm lồi nếu $a_{ij} > 0$, là hàm lõm nếu $a_{ij} < 0$.

Để được phương án tối ưu toàn bộ, đưa vào biến mới:

$$X_g = \frac{1}{A_g} \tag{2.35}$$

Thay hệ thức trên vào bài toán (2.31), ta có bài toán tối ưu:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Cực tiểu hóa hàm } C = \sum_{g=1}^{G} C_g\gamma_g L_g / X_g \quad &(a)\\ &\text{Với điều kiện:}\\ &\sum_{g=1}^{G} X_g \sum_{i=1}^{I'} a_{ij} \le \Delta_j &(b)\\ &0 \le X_g \le U_g &(c)\end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

Trong bài toán trên, hàm mục tiêu là một hàm lồi vì $C_g > 0, \gamma_g > 0, L_g > 0, X_g > 0$ theo ý nghĩa vật lí, điều này đã được chứng minh trong mục §5 chương một. Điều kiện ràng buộc (2.36b) bây giờ trở thành hàm lồi vì nó tuyến tính.

Cần chú ý là trong điều kiện (2.36c) biến X_g có thể triệt tiêu, lúc này hàm mục tiêu C trở thành vô cùng lớn. Để đề phòng khả năng này, ta đặt:

$$X_g = y_g + l_g \qquad (2.37)$$

Trong đó: y_g là một biến mới không âm, l_g là một hằng số. Khi $y_g = 0$, $X_g = \min X_g = l_g$. Căn cứ vào hệ thức (2.35), ta có:

$$l_g = \min X_g = 1/\max A_g \qquad (2.38)$$

max A_g xem như cận trên của A_g.

Đồng thời, từ hê thức (2.37), ta có:

$$\max X_g = \max y_g + l_g \qquad (2.39)$$

Căn cứ vào các hệ thức (2.35), (2.38), (2.39), ta có:

$$\max y_g = 1/\min A_g - 1/\max A_g \qquad (2.40)$$

Trong đó, min A_g xem như cận dưới của A_g, xác định từ yêu cầu về độ bền.

Cuối cùng, thay X_g từ hệ thức (2.37) vào bài toán (2.36) và căn cứ vào hệ thức (2.40), ta có bài toán tối ưu:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Cực tiểu hóa hàm } C = \sum_{g=1}^{G} C_g\gamma_g L_g / y_g + l_g \quad &(a)\\ &\text{Với điều kiện:}\\ &\sum_{g=1}^{G} y_g \sum_{i=1}^{I'} a_{ij} \le \Delta_j - l_g \sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{I'} a_{ij} &(b)\\ &0 \le y_g \le 1/\min A_g - 1/\max A_g &(c)\\ &l_g = 1/\max A_g &(d)\end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

Bài toán trên đây có dạng phi tuyến và gồm các biến tách rời nên có thể giải bằng phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu.

Thí dụ 2.4:

Đầu đề giống thí dụ (2.2). Yêu cầu giải theo phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu.

Giải

Trong thí dụ (2.2) ta đã thành lập bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa hàm $C = 3000\,A_1 + 1732\,A_2$ (a)

Với điều kiện:

$$\frac{6000}{69}\frac{1}{A_1}+\frac{2000\sqrt{3}}{69}\frac{1}{A_2}\le 3 \quad \text{(b)}$$

$$A_1 \ge 31{,}25 \quad A_2 \ge 34{,}56 \quad \text{(c)}$$

(2.42)

Thay $1/A_1 = y_1 + l_1$, $1/A_2 = y_2 + l_2$ vào phương trình (2.42a) và điều kiện (2.42b):

$$C=\frac{3000}{y_1+l_1}+\frac{1732}{y_2+l_2}$$

$$\frac{6000y_1}{69}+\frac{2000\sqrt{3}y_2}{69}\le 3-\frac{6000l_1}{69}-\frac{2000\sqrt{3}l_2}{69}$$

Chọn cận trên của A_g là:

$$\max A_1 = \max A_2 = 100\ \text{mm}^2$$

Thay hệ thức trên vào hệ thức (2.41d):

$$l_1 = l_2 = 1/100 = 0{,}01$$

Căn cứ vào điều kiện (2.42c) và (2.41c) ta có:

$$y_1 \le 0{,}014$$

$$y_2 \le 0{,}0186$$

Thay các kết quả trên vào bài toán (2.42), ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa hàm

$$Z=\frac{3000}{y_1+0{,}01}+\frac{1732}{y_2+0{,}01} \quad \text{(a)}$$

Với điều kiện:

$$86{,}9y_1 + 50{,}2y_2 \le 1{,}63 \quad \text{(b)}$$

$$0 \le y_1 \le 0{,}014 \quad \text{(c)}$$

$$0 \le y_2 \le 0{,}0186 \quad \text{(d)}$$

(2.43)

Để giải theo phương pháp tuyến tính hoá từng mẫu, đối với biến y_1 cũng như biến y_2, ta chia trục hoành thành 3 đoạn trong khoảng biến thiên của y_1 và y_2. Trong phương trình (2.43a) và (2.43b), ta nhận thấy (xem mục §5 chương một):

$$\left.\begin{array}{l} f_1(y_1) = \dfrac{3000}{y_1 + 0,01}; \quad f_2(y_2) = \dfrac{1732}{y_2 + 0,01}; \\ g_{11}(y_1) = 86,9y_1 \; ; g_{12}(y_2) = 50,2y_2 \text{ do đó:} \\ \hat{f}_1(y_1) = \sum_{k=0}^{3}\beta_{k1}f_1(y_{k1}); \quad \hat{f}_2(y_2) = \sum_{k=0}^{3}\beta_{k2}f_2(y_{k2}); \\ \hat{g}_{11}(y_1) = \sum_{k=0}^{3}\beta_{k1}g_{11}(y_{k1}); \quad \hat{g}_{12}(y_2) = \sum_{k=0}^{3}\beta_{k2}g_{12}(y_{k2}) \end{array}\right\} \quad (2.44)$$

Giá trị của y_1 và y_2 tại các điểm chia ghi trên bảng (2.1)

Sau khi tính giá trị của các hàm $\hat{f}_k(y_k)$, $\hat{g}_{ik}(y_k)$ trong hệ thức (2.44) theo các số liệu trong bảng (2.1), ta có bài toán tối ưu:

Bảng 2.1

y_1	y_{01}	y_{11}	y_{21}	y_{31}
	0,00925	0,01100	0,01210	0,0140
y_2	y_{02}	y_{12}	y_{22}	y_{32}
	0,0090	0,01150	0,0136	0,0186

Cực tiểu hóa hàm:

$$Z = \hat{f}(y) = 3000\left(\frac{\beta_{01}}{0,01925} + \frac{\beta_{11}}{0,0210} + \frac{\beta_{21}}{0,0221} + \frac{\beta_{31}}{0,0240}\right) + + 1732\left(\frac{\beta_{02}}{0,0190} + \frac{\beta_{12}}{0,0215} + \frac{\beta_{22}}{0,0236} + \frac{\beta_{32}}{0,0286}\right) \quad (a)$$

Với điều kiện:

$$\hat{g}_1(y) = 86,9\left(0,00925.\beta_{01} + 0,011\beta_{11} + 0,0121\beta_{21} + 0,0140\beta_{31}\right) + +50,2\left(0,0090\beta_{02} + 0,0115\beta_{12} + 0,0136\beta_{22} + 0,0186\beta_{32}\right) \le 1,63 \quad (b)$$

$$\beta_{01} + \beta_{11} + \beta_{21} + \beta_{31} = 1 \quad (c)$$

$$\beta_{02} + \beta_{12} + \beta_{22} + \beta_{32} = 1 \quad (d)$$

(2.45)

Đặt $\beta_{01} = x_1$, $\beta_{11} = x_2$, $\beta_{21} = x_3$, $\beta_{31} = x_4$, $\beta_{02} = x_5$, $\beta_{12} = x_6$, $\beta_{22} = x_7$, $\beta_{32} = x_8$. Đưa biến đệm v_1 vào điều kiện (2.45b) và đưa các biến giả tạo v_2, v_3 vào các điều kiện (2.45c), (2.45d). Sau khi chỉnh lí kết quả tính toán, ta có bài toán tối ưu:

Cực đại hóa hàm:

$$\hat{Z}' = -\hat{Z} = -156000x_1 - 143000x_2 - 136000x_3 - 125000x_4 - 91200x_5 - 80600x_6 - 73400x_7 - 60600x_8$$

Với điều kiện:

$$0,804x_1 + 0,956x_2 + 1,05x_3 + 1,22x_4 + 0,452x_5 + 0,577x_6 + 0,682x_7 + 0,933x_8 + v_1 = 1,63$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + v_2 = 1$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + v_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \ge 0$$

Ta giải bài toán theo phương pháp đơn hình. Các bảng đơn hình trình bày trên bảng (2.2)

Bảng 2.2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
0,804	0,956	1,05	1,22	0,452	0,577	0,682	0,933	1,63	v_1
1	1	1	1	0	0	0	0	1,00	v_2
0	0	0	0	1	①	1	1	1,00	v_3
-156000	-143000	-136000	-125000	-912000	-80600	-73400	-60600	0	$-\hat{Z}'$
x_1	x_2		x_4	x_5		x_7	x_8		
0,804	0,956	1,05	1,22	-0,125		0,105	0,356	1,05	v_1
1	1	①	1	0		0	0	1,00	v_2
0	0	0	0	1		1	1	1,00	x_6
-156000	-143000	-136000	-125000	-10600		7200	20000	80600	$-\hat{Z}'$
x_1	x_2		x_4	x_5		x_7	x_8		
-0,246	-0,094		(0,17)	-0,125		0,105	--0,356	0	v_1
1	1		1	0		0	0	1,00	x_3
0	0		0	1		1	1	1,00	x_6
-20000	-7000		11000	-10600		72000	20000	216600	$-\hat{Z}'$
x_1	x_2		v_1	x_5		x_7	x_8		
-1,45	-0,533		5,88	-0,735		(0,618)	2,09	0	x_4
2,45	1,553		-5,88	0,735		-0,618	-2,09	1,00	x_3
0	0		0	1		1	1	1,00	x_6
-4050	-917		-64700	-2515		402	-2990	216600	$-\hat{Z}'$
x_1	x_2		v_1	x_5		x_4	x_8		
-2,33	-0,896		9,50	-1,19		1,62	3,38	0	x_7
						1		1,00	x_3
						-1,619		1,00	x_6
-3114	-557		-60480	-2037		-650	-1632	216600	$-\hat{Z}'$

Căn cứ vào bảng đơn hình cuối cùng, ta có:

$$x_6 = \beta_{12} = 1,00;\ x_7 = \beta_{22} = 0,00;\ x_3 = \beta_{21} = 1,00;\ x_4 = \beta_{31} = 0$$

Căn cứ vào các số liệu trong bảng (2.1) và công thức (1.83) (xem mục §5 chương một), ta suy ra:

$$y_1 = y_{21} = 0,01210;\ y_2 = y_{12} = 0,0115$$

Áp dụng các hệ thức (2.35) và (2,37), ta có:

$$x_1 = 1/A_1 = y_1 + l_1 = 0,01210 + 0,01 = 0,02210$$

do đó: $A_1 = 1/0,02210 = 45,2mm^2$

Bằng cách tương tự, ta có:

$$A_2 = 1/0,0215 = 46,5mm^2$$

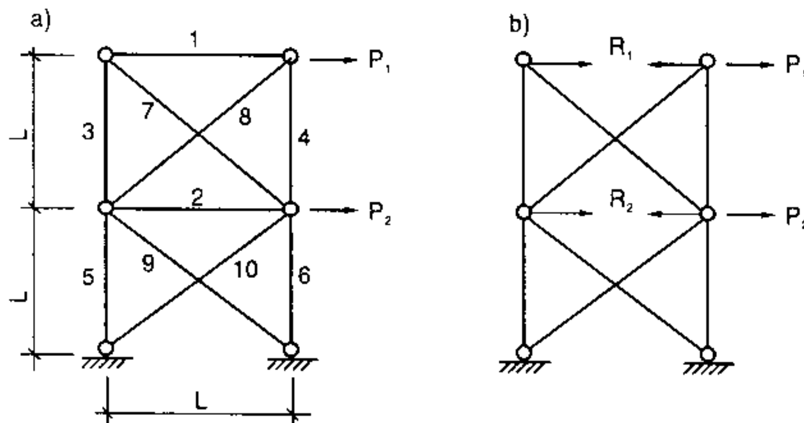
Vậy phương án tối ưu là:

$$A_1 = 45,2mm^2, A_2 = 46,5mm^2, \hat{Z} = \min V = 216600mm^3$$

Các kết quả trên đây sai lệch không đáng kể bao nhiêu so với kết quả tính theo phương pháp quy hoạch hình học trong thí dụ (2.2).

§5. BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH GIÀN SIÊU TĨNH

Khi tính giàn siêu tĩnh, ta đưa nó về hệ cơ bản bằng cách bỏ các liên kết thừa và thay vào đó các lực chưa biết $R_1, R_2, ... R_n$. Chẳng hạn kết cấu trên hình (2.9a) đưa về hệ cơ bản như hình (2.9b), trong đó các liên kết thừa 1 và 2 thay thế bằng các lực R_1 và R_2.



Hình 2.9

Áp dụng công thức (2.5) ta có vectơ nội lực:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_o . \mathbf{P} + \mathbf{B}_1 . \mathbf{R} \tag{2.46}$$

Trong đó: $\mathbf{B}_o$, $\mathbf{B}_1$ là các ma trận ảnh hưởng nội lực trong hệ cơ bản ứng với **P** và **R**.

Để tìm ma trận $\mathbf{B}_o$, ta bỏ toàn bộ các lực **R**, lần lượt đặt các ngoại lực $P_1 = 1, P_2 = 1, ... P_m = 1$ lên hệ cơ bản và tiến hành tính nội lực. Để tìm ma trận $\mathbf{B}_1$, ta bỏ toàn bộ ngoại lực **P**, lần lượt đặt các lực $R_1 = 1, R_2 = 1,..., R_n = 1$ lên hệ cơ bản và tiến hành tính nội lực. Chẳng hạn đối với giàn trên hình (2.9), ta tìm các ma trận $\mathbf{B}_o$ và $\mathbf{B}_1$ như sau.

Tìm ma trận $\mathbf{B}_o$:

Khi $P_1 = 1$: $N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0, N_4 = -1, N_5 = 2, N_6 = -1, N_7 = 0, N_8 = \sqrt{2}, N_9 = -\sqrt{2}, N_{10} = 0$.

Khi $P_2 = 1$: $N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0, N_4 = 0, N_5 = 0, N_6 = -1, N_7 = 0, N_8 = 0, N_9 = 0, N_{10} = \sqrt{2}$.

Tìm ma trận $\mathbf{B}_1$:

Khi $R_1 = 1$: $N_1 = 1, N_2 = 0, N_3 = 1, N_4 = 1, N_5 = -1, N_6 = -1, N_7 = -\sqrt{2}, N_8 = -\sqrt{2}, N_9 = \sqrt{2}, N_{10} = \sqrt{2}$.

Khi $R_2 = 1$: $N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 0, N_4 = 0, N_5 = 1, N_6 = 1, N_7 = 0, N_8 = 0, N_9 = -\sqrt{2}, N_{10} = -\sqrt{2}$.

Căn cứ vào kết quả trên ta có:

$$\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Để đảm bảo độ bền, cần thỏa mãn điều kiện:

$$\mathbf{a.S} \leq \sigma^* \qquad \text{(a)}$$

Trong đó: a là ma trận chéo

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & & & & & O \\ & \frac{1}{A_2} & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \frac{1}{A_i} & & \\ & & & & \dots & \\ O & & & & & \frac{1}{A_p} \end{bmatrix} \qquad (2.47)$$

σ^* là vectơ ứng suất cho phép. Thay hệ thức (2.46) vào bất đẳng thức (a) ta có:

$$\mathbf{a.\ B_o.P + a.\ B_1.\ R} \leq \sigma^* \qquad (2.48)$$

Đây là điều kiện ràng buộc về độ bền. Đối với thanh thứ i, điều kiện ràng buộc về độ bền có dạng:

$$\frac{D_i}{A_i} + \sum_{k=1}^{n} e_{ik}.R_k / A_i \leq \sigma_i^t \qquad (2.49)$$

Trong đó: R_k là lực liên kết thừa thứ k; số hạng thứ nhất ở vế trái của (2.49) là kết quả của phép nhân hàng thứ i của ma trận a với ma trận $[\mathbf{B_oP}]$; số hạng thứ 2 ở vế trái của (2.49) là kết quả của phép nhân hàng thứ i của ma trận a với ma trận $[\mathbf{B_1R}]$.

Để đảm bảo độ cứng, ta áp dụng công thức (2.8):

$$\mathbf{X_p} = \mathbf{B'_o.F.B_o.P} + \mathbf{B'_o.F.B_1.R} \le \Delta \qquad (2.50)$$

Trong đó: Δ là vectơ chuyển vị cho phép. Điều kiện trên gọi là điều kiện ràng buộc về độ cứng.

Giả sử cần hạn chế chuyển vị tại điểm đặt lực P_j. Từ bất đẳng thức (2.50), ta suy ra điều kiện ràng buộc

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{a_{ji}}{A_i} + \sum_{k=1}^{n} R_k \sum_{i=1}^{p} \frac{b_{jki}}{A_i} \le \Delta_j \qquad (2.51)$$

Trong đó: Δ_j là chuyển vị cho phép tại điểm đặt lực P_j; số hạng thứ nhất trong vế trái là kết quả của phép nhân hàng j của ma trận $\left[\mathbf{B'_o.f.B_o}\right]$ với vectơ **P**; tổng $\Sigma b_{jki}/A_i$ trong số hạng thứ 2 ở vế trái là phần tử nằm trên hàng thứ j, cột thứ k của ma trận $\left[\mathbf{B'_o.f.B_1}\right]$.

Để đảm bảo điều kiện biến dạng liên tục, ta áp dụng phương trình (2.10):

$$B'_1.f.B_o.P + B'_1.f.B_1.R = 0 \qquad (2.52)$$

Ta gọi điều kiện trên là điều kiện biến dạng liên tục.

Hệ thức ma trận (2.52) biểu thị một hệ phương trình trong đó có n lực liên kết thừa. Phương trình thứ s có dạng:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{g_{si}}{A_i} + \sum_{k=1}^{n} R_k . \sum_{i=1}^{p} \frac{f_{ski}}{A_i} = 0 \qquad (2.53)$$

Trong đó: số hạng thứ nhất ở vế trái là kết quả của phép nhân hàng thứ s của ma trận $\left[\mathbf{B'_o.f.B_o}\right]$ với vectơ **P**; tổng $\Sigma f_{ski}/A_i$ trong số hạng thứ 2 ở vế trái là phần tử nằm trên hàng thứ s cột thứ k của ma trận $\left[\mathbf{B'_1.f.B_1}\right]$.

Tóm lại, trong bài toán tối ưu tính giàn siêu tĩnh, có 3 loại điều kiện ràng buộc:

1) Điều kiện ràng buộc về độ bền.

2) Điều kiện ràng buộc về độ cứng.

3) Điều kiện ràng buộc về biến dạng liên tục.

Đồng thời, có 2 loại biến: diện tích tiết diện A_i và các lực liên kết thừa R_i.

Đây là bài toán quy hoạch phi tuyến.

Căn cứ vào phương trình (2.17) và các điều kiện (2.49), (2.51), (2.53) đồng thời chú ý đến tính chất phân nhóm, ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa hàm

$$C = \sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g L_g A_g$$

Với điều kiện:

$$\frac{D_i}{A_i} + \sum_{k=1}^{n} e_{ik}.R_k / A_i \le \sigma_i^*$$

$i = 1, 2, ... m$

$$\sum_{g=1}^{G} \frac{1}{A_g} \sum_{i=I_g}^{I_g'} a_{ji} + \sum_{k=1}^{n} R_k \sum_{g=1}^{G} \frac{1}{A_g} \sum_{i=I_g}^{I_g'} b_{jki} \le \Delta_j \qquad (2.54)$$

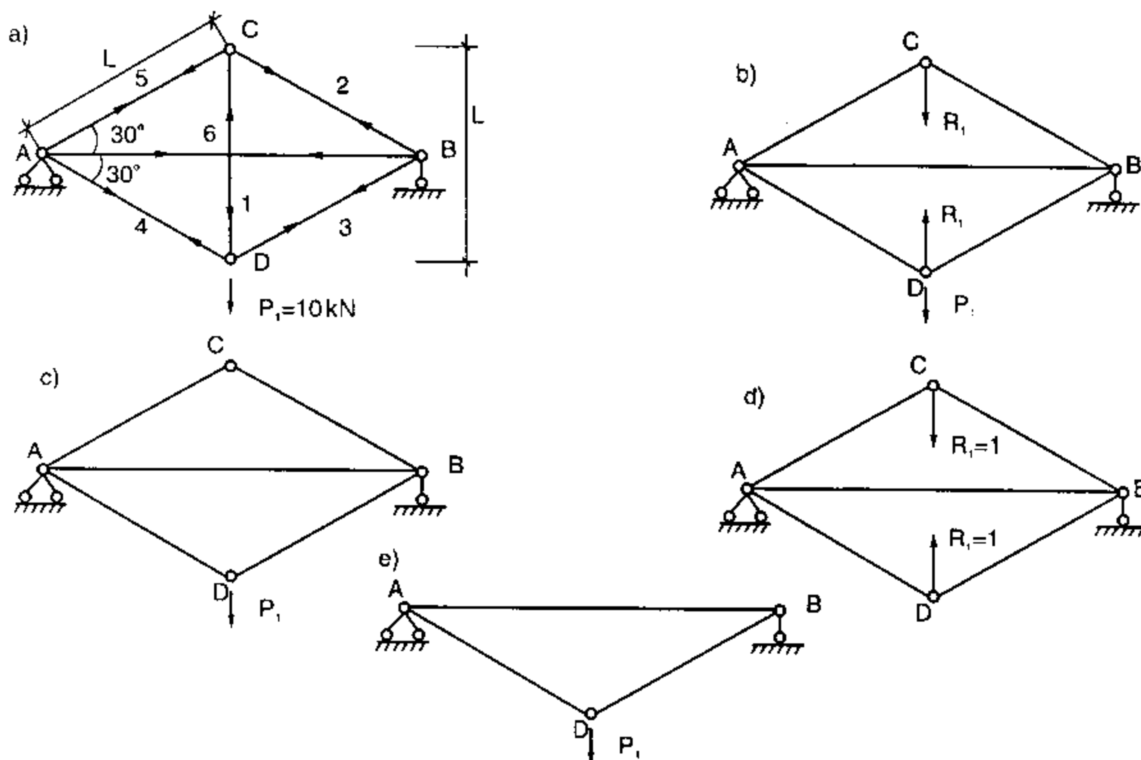
$$\sum_{g=1}^{G} \frac{1}{A_g} \sum_{i=I_g}^{I_g'} g_{si} + \sum_{k=1}^{n} R_k \sum_{g=1}^{G} \frac{1}{A_g} \sum_{i=I_g}^{I_g'} f_{ski} = 0$$

$s = 1, 2,... n$

Trong đó: I_g, I_g' - số thứ tự của phân tử đầu tiên và số thứ tự của phân tử cuối cùng thuộc nhóm g. D_i, e_{ik}, a_{ji}, b_{jki}, g_{si}, f_{ski}, σ_i^*, Δ_j là các hằng số.

Thí dụ 2.5.

Cho một giàn siêu tĩnh như hình (2.10a). Tải trọng P_1 = 10kN. Các thanh 1, 2, 3,4, 5 thuộc nhóm diện tích A_1, thanh 6 thuộc nhóm diện tích A_2. Ứng suất kéo cho phép $\sigma_k^* = 0,15$ kN/mm², ứng suất nén cho phép $\sigma_n^* = 0,1$kN/mm². Mô đuyn đàn hồi E = 207 kN/mm². Chuyển vị cho phép tại điểm D bằng 4,8mm. L = 1000mm.



Hình 2.10

Giải

Ta chọn hệ cơ bản bằng cách vứt bỏ thanh 1 và thay vào đó lực R_1 (hình 2.10b).

Sau khi tiến hành tính nội lực trên các hệ cơ bản (2.10c), (2.10d), ta suy ra:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}}_{B_0} .[P_1] + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{B_1} .[R_1]$$

Vậy:

$$\mathbf{B}_0' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Ma trận độ mềm

$$\mathbf{f} = \frac{L}{E}\begin{bmatrix} 1/A_1 & & & & & \\ & 1/A_1 & & & O & \\ & & 1/A_1 & & & \\ & & & 1/A_1 & & \\ & O & & & 1/A_1 & \\ & & & & & \sqrt{3}/A_2 \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được kết quả:

$$\mathbf{B}_0'.\mathbf{f} = L/E\,[\,0 \;\; 0 \;\; 1/A_1 \;\; 1/A_1 \;\; 0 \;\; -1{,}5/A_2\,]$$

$$\mathbf{B}_0'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_0 = L\,(8A_2 + 3\sqrt{3}A_1)/4E.A_1A_2$$

$$\mathbf{B}_1'.\mathbf{f} = L/E\,[1/A_1 \;\; -1/A_1 \;\; -1/A_1 \;\; -1/A_1 \;\; -1/A_1 \;\; 3/A_2]$$

$$\mathbf{B}_1'\mathbf{f}.\mathbf{B}_1 = L(5A_2 + 3\sqrt{3}A_1)/EA_1A_2$$

$$\mathbf{B}_1'.\mathbf{f}.\,\mathbf{B}_0 = (B_0'.f.B_1)' = -\,L(4A_2 + 3\sqrt{3}A_1)/2EA_1A_2$$

Căn cứ vào điều kiện (2.49) và các kết quả trên, ta suy ra điều kiện ràng buộc về độ bền:

$$\left.\begin{aligned} &\left(0.P_1 + R_1\right)/\ A_1 && \le \sigma_1^* \\ &\left(0.P_1 - R_1\right)/\ A_1 && \le \sigma_2^* \\ &\left(1.P_1 - R_1\right)/\ A_1 && \le \sigma_3^* \\ &\left(1.P_1 - 1R_1\right)/\ A_1 && \le \sigma_4^* \\ &\left(0.P_1 - 1.R_1\right)/\ A_1 && \le \sigma_5^* \\ &\left(-\sqrt{3}.P_1/2 + \sqrt{3}R_1\right)/\ A_2 && \le \sigma_6^* \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

Căn cứ vào điều kiện (2.51), ta suy ra điều kiện ràng buộc về độ cứng:

$$P_1.L\,(8A_2 + 3\sqrt{3}\,A_1)/4EA_1A_2 - R_1.L(4A_2 + 3\sqrt{3}\,A_1)/2EA_1A_2 \le 4,8 \qquad (2.56)$$

Căn cứ vào điều kiện (2.53), ta suy ra điều kiện ràng buộc về biến dạng liên tục:

$$-P_1.L(4A_2 + 3\sqrt{3}\,A_1)/2EA_1A_2 + R_1.L(5A_2 + 3\sqrt{3}\,A_1)EA_1A_2 = 0 \qquad (2.57)$$

Vì giàn làm bằng một loại vật liệu, nên hàm mục tiêu có dạng (xem phương trình 2.15):

$$V = \sum_{g=1}^{2} L_g A_g = A_1 \sum_{i=1}^{5} L_i + A_2.L_6 \Rightarrow V = 5000A_1 + 1732A_2$$

Thay thế các kết quả vừa tính trên vào bài toán (2.54), ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa hàm $\qquad V = 5000\,A_1 + 1732\,A_2$

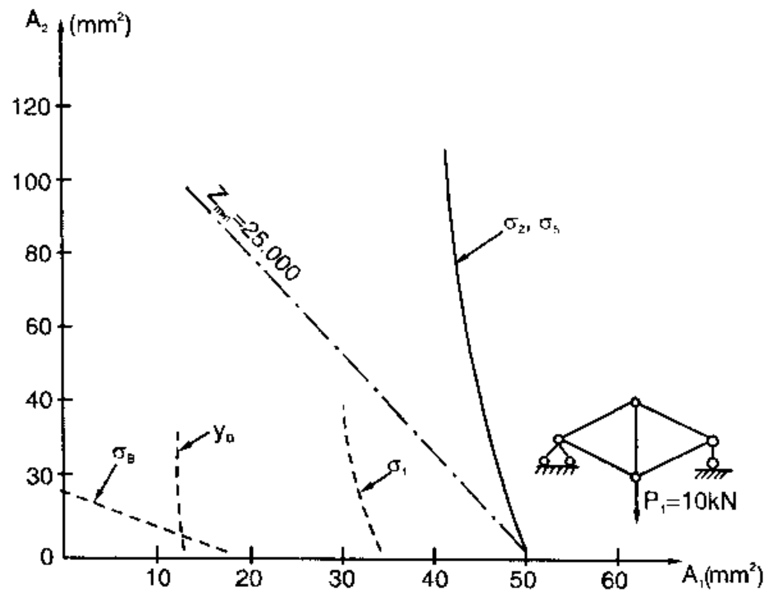
thoả mãn các điều kiện (2.55), (2.56), (2. 57).

Trên đây, ta đã thay hàm giá cả C bằng hàm thể tích V.

Bài toán bao gồm 8 điều kiện ràng buộc phi tuyến và 3 biến A_1, A_2, R_1. Hàm mục tiêu có dạng tuyến tính. Để giải theo phương pháp đồ thị, ta tìm cách khử biến R_1. Từ điều kiện (2.57), ta suy ra:

$$R_1 = P_1\,(4A_2 + 3\sqrt{3}\,A_1)/\,(10A_2 + 6\sqrt{3}\,A_1)$$

R_1 là lực căng, luôn luôn dương. Thay biểu thức R_1 vào 7 điều kiện ràng buộc còn lại, bài toán chỉ còn 2 biến A_1 và A_2. Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (2.11). Các đường σ_1, σ_2, σ_5, σ_6 biểu thị các đường biên ứng với các điều kiện bền tới hạn thứ 1, 2, 5, 6 (xem hệ thức 2.55). Các đường biên ứng với điều kiện bền tới hạn thứ 3, 4 không biểu thị trên hình (2.11) vì chúng không đáng kể so với các đường biên khác. Ta nhận thấy ứng suất trong các thanh 2 và 5 là đáng kể. Đường y_D biểu thị đường biên ứng với điều kiện tới hạn về độ cứng (2.56). Hình (2.11) cho thấy phương án tối ưu là: $A_1 = 50mm^2$, $A_2 = 0$, min $V = 250000mm^3$. Điều này chứng tỏ có thể vứt bỏ thanh số 6 và giàn còn lại là một giàn tĩnh định.

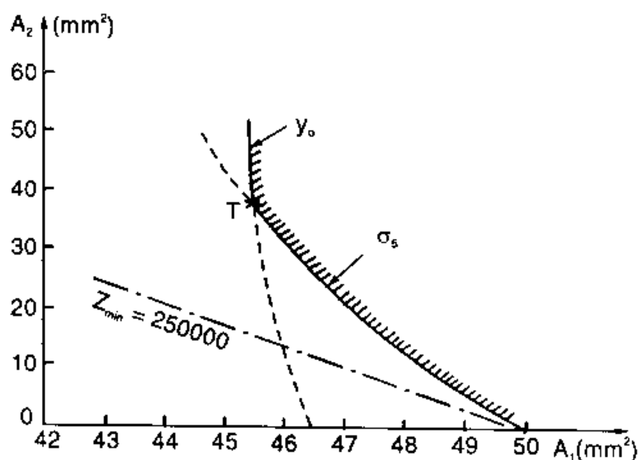


Hình 2.11

Thí dụ 2.6

Đầu đề giống thí dụ (2.5) nhưng thay đổi điều kiện ràng buộc về độ cứng: chuyển vị cho phép tại điểm D bằng 1,3mm.

Các đường biên ứng với các điều kiện tới hạn không có gì thay đổi (hình 2.12). Riêng đường biên ứng với điều kiện tới hạn về độ cứng y_D dịch sang phải và gặp đường biên σ_2, σ_5 tại điểm T. Kết quả ghi trên hình (2.12) cho thấy phương án tối ưu vẫn không thay đổi: A_1 = 50mm², $A_2 = 0$. Chuyển vị tại điểm D bằng 1,21mm. Điều này chứng tỏ điều kiện ràng buộc về độ cứng vẫn chưa tới hạn.



Hình 2.12

Thí dụ 2.7

Để nghiên cứu ảnh hưởng của việc phân nhóm đến phương án tối ưu của bài toán, ta sẽ xét một số phương án phân nhóm sau:

1. Giả sử các thanh 2, 3, 4, 5, 6 thuộc nhóm diện tích A_1, thanh 1 thuộc nhóm diện tích A_2 (hình 2.10). Phương án tối ưu ứng với phương án này là $A_2 = 0$ có nghĩa là có thể vứt bỏ thanh số 1. Lúc này, nội lực trong các thanh 2 và 5 triệt tiêu, dạng kết cấu thay đổi như trên hình (2.10e). $N_3 = N_4 = 10$kN, $N_6 = -5\sqrt{3}$ kN. Vì cả 3 thanh này thuộc nhóm diện tích A_1, nội lực trong thanh số 6 cho ta cận dưới của diện tích A_1 là 86,6mm². Thể tích nhỏ nhất của kết cấu bằng 3232mm³. Rõ ràng là kết cấu mới (chỉ có 3 thanh) nặng hơn kết cấu cũ. Thực ra, nếu thanh số 6 có diện tích khác với 2 thanh còn lại thì thể tích sẽ là 283333mm³.

2. Giả sử các thanh 2, 5 thuộc nhóm có diện tích A_1, các thanh 1, 3, 4 thuộc nhóm diện tích A_2, thanh 6 thuộc nhóm diện tích A_3. Phương án tối ưu ứng với phương án này là: A_1 = 50mm², A_2 = 33,3mm², $A_3 = 0$, thể tích min V = 200000mm³. Với phương án này, thể tích kết cấu nhỏ hơn kết cấu cũ.

3. Giả sử trong kết cấu hình (2.10e), ta vứt bỏ thanh ngang và thay gối tựa di động B bằng một khớp. Hai thanh còn lại thuộc nhóm diện tích A_1. Phương án tối ưu ứng với phương án này là : A_1 = 66,7 mm², thể tích min V = 133400 mm³.

Những ví dụ đơn giản trên đây cho thấy khi các điều kiện tải trọng, độ bền, độ cứng như nhau, việc phân nhóm khác nhau sẽ dẫn đến những phương án tối ưu khác nhau đồng thời hình dạng kết cấu có khả năng thay đổi. Ta cũng nhận thấy trong một số phương án phân nhóm nào đó, điều kiện ràng buộc về độ cứng chưa phải là điều kiện khống chế phương án tối ưu. Tuy nhiên, điều này không phải là phổ biến trong thực tế. Như sau này ta sẽ thấy, trong nhiều trường hợp, điều kiện ràng buộc về độ cứng đóng vai trò quan trọng hơn điều kiện ràng buộc về độ bền.

§6. BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH KHUNG

§6.1. Một số đặc điểm của khung

Khung khác với giàn ở một số đặc điểm như sau:

1) Trong khung, ngoài lực dọc ra, còn có mômen và lực cắt.

Liên hệ giữa mômen và góc xoay của một phần tử ij bất kì có thể viết:

$$\left.\begin{aligned} M_i &= 4\left(\frac{EI}{L}\right)_{ij}.\theta_i + 2\left(\frac{EI}{L}\right)_{ij}.\theta_j \\ M_j &= 2\left(\frac{EI}{L}\right)_{ij}.\theta_i + 4\left(\frac{EI}{L}\right)_{ij}.\theta_j \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Trong đó: chỉ số ij ứng với phần tử ij; M_i (M_j)- mômen tại đầu i (đầu j) của thanh ij. Ta quy ước mômen tại đầu thanh là dương khi nó quay ngược chiều kim đồng hồ; θ_i (θ_j) - góc xoay tại đầu i (đầu j) của thanh ij. Ta cũng quy ước góc xoay quay ngược chiều kim đồng hồ là dương.

Giải phương trình trên đây theo M_i, M_j, ta được:

$$\left.\begin{aligned} \theta_i &= \frac{1}{3}\left(\frac{L}{EI}\right)_{ij}.M_i - \frac{1}{6}\left(\frac{L}{EI}\right)_{ij}.M_j \\ \theta_j &= -\frac{1}{6}\left(\frac{L}{EI}\right)_{ij}.M_i - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{EI}\right)_{ij}.M_j \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Dưới dạng ma trận, ta có:

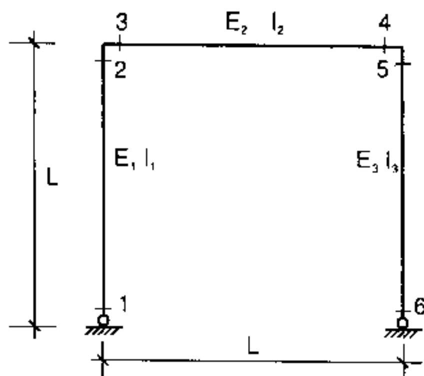
$$U_{ij} = f_{ij} \, . \, S_{ij} \qquad (2.58)$$

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} \; S_{ij} = \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} \qquad (2.59)$$

$$f_{ij} = \frac{1}{6}\left(\frac{l}{EI}\right)_{ij}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.60)$$

Trong đó: U_{ij}- vectơ biến dạng; S_{ij}- vectơ nội lực, f_{ij}- ma trận độ mềm của phần tử ij.

Đối với khung trong đó có nhiều phần tử, ta kết hợp các hệ thức (2.58), (2.59), (2.60). Chẳng hạn khung trên hình (2.13) được chia thành các phần tử 1-2, 3- 4, 5- 6. Liên hệ giữa vectơ biến dạng và nội lực như sau:



Hình 2.13

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\\ \theta_5\\ \theta_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{12} & & \\ & f_{34} & \\ & & f_{56}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\\ M_4\\ M_5\\ M_6\end{bmatrix} \qquad (2.61)$$

Thay hệ thức (2.60) vào hệ thức (2.61):

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\\ \theta_5\\ \theta_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h/3E_1I_1 & -h/6E_1I_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -h/6E_1I_1 & h/3E_1I_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & L/3E_2I_2 & L/6E_{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -L/6E_{22} & L/3E_{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & h/3E_3I_3 & -h/6E_3I_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h/6E_3I_3 & h/3E_3I_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\\ M_4\\ M_5\\ M_6\end{bmatrix} \qquad (2.61a)$$

2) Khi tính khung theo phương pháp lực dưới dạng ma trận, ta chia nó thành các phần tử theo nguyên tắc đã trình bày trong §1.1. Song ngoài các tải trọng tập trung đặt tại các nút, còn có tải trọng phân bố đặt trực tiếp lên các phần tử. Trong trường hợp này, ta xử lí như sau. Xem trạng thái thực của khung là tổ hợp của 2 trạng thái: trạng thái ngàm và trạng thái tự do. Ở trạng thái ngàm, các nút bị chốt, không có chuyển vị (hình 2.14b) nên phản lực phát sinh tại các nút đó (hình 2.14c, 2.14d). Ở trạng thái tự do, các nút hoàn toàn được giải phóng (hình 2.14e), tải trọng tác dụng bây giờ là các lực tập trung đặt tại các nút trước kia bị chốt. Các lực này ngược chiều với các phản lực tương ứng ở trạng thái ngàm và có giá trị tuyệt đối bằng giá trị tuyệt đối của các phản lực đó.

Theo sự phân tích trên, nội lực trong khung bằng tổng của nội lực ở trạng thái ngàm và nội lực ở trạng thái tự do (hình 2.14e và 2.14c).

§6.2. Bài toán tối ưu

Trước hết, ta xét trường hợp khung siêu tĩnh, khung tĩnh định xem như trường hợp đặc biệt của khung siêu tĩnh.

Giả sử khung có n liên kết thừa và chịu tác dụng của m tải trọng tập trung. Vectơ tải trọng

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$$

Vectơ lực liên kết thừa

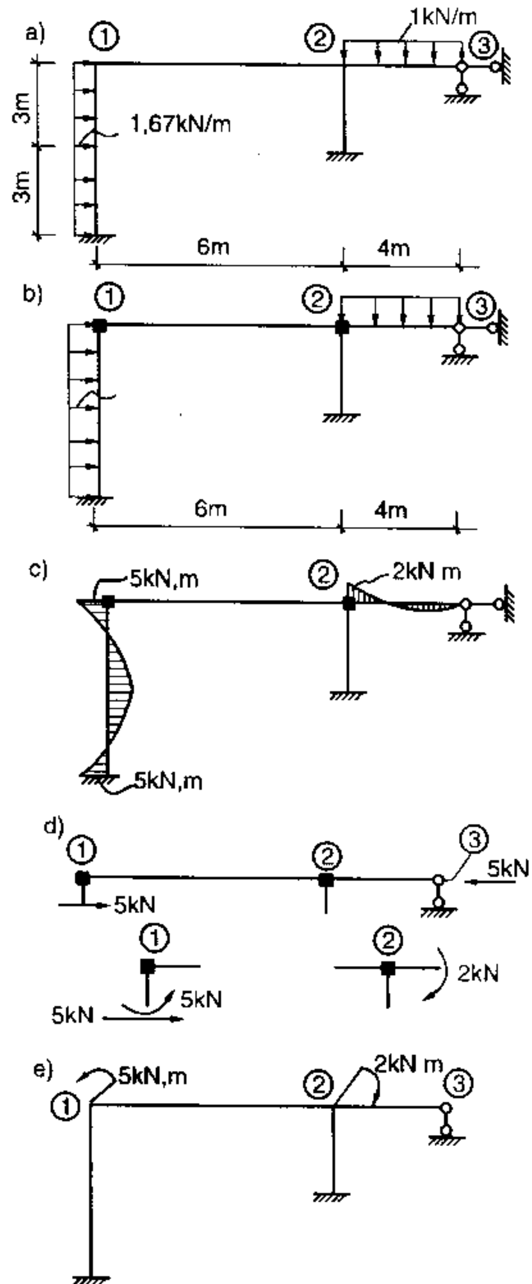
$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, ..., R_n\}$$

Vectơ nội lực trong khung (xem hệ thức 2.5)

$$\mathbf{S} = \mathbf{B_0 P} + \mathbf{B_1 R} \qquad (2.62)$$

Trong đó: $\mathbf{S} = \{M_1, M_2, ..., M_s\}$. $\mathbf{B}_o$ và $\mathbf{B}_1$ là các ma trận ảnh hưởng nội lực trên hệ cơ bản ứng với **P** và **R**. Chẳng hạn, khung trên hình (2.15a) được chia thành các phần tử 1-2, 3-4, 5-6, 7- 8. Vectơ $\mathbf{P} = \{P_1\ P_2\}$. Vectơ lực liên kết thừa $\mathbf{R} = \{R_1\ R_2\ R_3\}$ (hình 2.15b). Vectơ nội lực $\mathbf{S} = \{M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_5\ M_6\ M_7\ M_8\}$. Bằng cách làm tương tự như đã trình bày trong mục §5, ta suy ra vectơ nội lực của chúng:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 21 & 1 & 0 \\ -21 & -1 & 1 \\ 21 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$



Hình 2.14

Giống như bài toán tối ưu tính giàn siêu tĩnh, ta có 3 loại điều kiện ràng buộc:

1) Điều kiện ràng buộc về độ bền.

Ứng suất tại một mặt cắt i trong khung phải thoả mãn điều kiện:

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W_i} \le \sigma_i^*$$

Trong đó:

M_i- mômen tại mặt cắt i;

W_i- mômen chống uốn tại mặt cắt i;

σ_i^* - ứng suất cho phép.

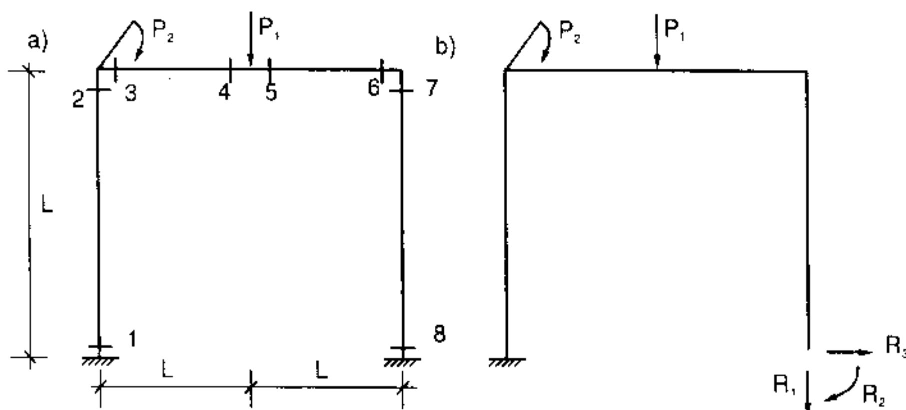
Dưới dạng ma trận, bất đẳng thức trên có thể viết:

$$\mathbf{W.S} = \mathbf{W}\,(\mathbf{B}_o.\mathbf{P} + \mathbf{B}_1.\mathbf{R}) \le \sigma^*$$

$$\text{hay}\quad \mathbf{W.B}_o.\mathbf{P} + \mathbf{W.B}_1.\mathbf{R} \le \sigma^* \tag{2.63}$$

Trong đó: σ* là vectơ ứng suất cho phép. **W** là một ma trận chéo có dạng:

$$
W = \begin{bmatrix}
1/W_1 & & & & & & & & & & \\
& 1/W_1 & & & & & & & & O & \\
& & 1/W_2 & & & & & & & & \\
& & & \cdots & & & & & & & \\
& & & & 1/W_i & & & & & & \\
& & & & & 1/W_i & & & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & \\
& & & & & & & \cdots & & & \\
& O & & & & & & & 1/W_r & & \\
& & & & & & & & & & 1/W_r
\end{bmatrix} \tag{2.64}
$$



Hình 2.15

Trong hệ thức trên, các đại lượng cùng chỉ số W_i được lặp lại từng đôi một trên đường chéo của ma trận vì đối với phần tử ij, $W_i = W_j$.

Tại mặt cắt t trong phần tử i (mặt cắt t có thể trùng với mặt cắt bên trái hoặc bên phải của phần tử i), điều kiện ràng buộc về ứng suất có dạng:

$$\left(D_{ti} / W_i + \sum_{k=1}^{n} e_{tik}.R_k \right) / W_i \le \sigma_i^* \tag{2.65}$$

Số hạng đầu tiên trong dấu ngoặc là kết quả của phép nhân hàng thứ t của ma trận W với ma trận $[\mathbf{B_0P}]$; số hạng thứ 2 trong dấu ngoặc là kết quả của phép nhân hàng thứ t của ma trận W với ma trận $[\mathbf{B_1.R}]$.

Đối với những phần tử chịu tác dụng đồng thời của mômen và lực dọc, điều kiện ràng buộc về ứng suất có dạng:

$$N_i / A_i + \left(D_{ti} / W_i + \sum_{k=1}^{n} e_{tik}.R_k \right) / W_i \le \sigma_i^* \tag{2.66}$$

Trong đó: N_i- lực dọc trong phần tử i; A_i- diện tích tiết diện của phần tử i.

2) Điều kiện ràng buộc về độ cứng.

Giả sử Δ là vectơ chuyển vị cho phép tại các điểm đặt lực. Áp dụng công thức (2.8), ta có điều kiện ràng buộc về độ cứng:

$$\mathbf{X}_p = \{y_1\ y_2\ \dots\ y_m\} = \mathbf{B}_o'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_o.\mathbf{P} + \mathbf{B}_o'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_1.\mathbf{R} \le \Delta \qquad (2.67)$$

Để kiểm tra chuyển vị tại điểm đặt lực P_j ta thực hiện phép nhân hàng thứ j của ma trận $\mathbf{B}_o'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_o$ với vectơ **P** và phép nhân hàng thứ j của ma trận $\mathbf{B}_o'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_1$ với vectơ **R**. Căn cứ vào kết quả của phép nhân, ta có điều kiện ràng buộc về độ cứng:

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{a_{ji}}{I_i} + \sum_{k=1}^{n}R_k\sum_{i=1}^{r}\frac{b_{jki}}{I_i} \le \Delta_j \qquad (2.68)$$

Trong đó: Δ_j là chuyển vị cho phép tại điểm đặt lực P_j. Tổng $\sum_{i=1}^{r}\frac{b_{jki}}{I_i}$ ở số hạng thứ 2 trong vế trái là phần tử nằm trên hàng thứ j, cột thứ k của ma trận $\mathbf{B}_o'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_1$.

3) Điều kiện ràng buộc về biến dạng liên tục:

$$\mathbf{B}_o'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_o.\mathbf{P} + \mathbf{B}_1'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_1.\mathbf{R} = 0 \qquad (2.69)$$

Từ phương trình trên, ta suy ra điều kiện ràng buộc về biến dạng liên tục tại điểm đặt lực liên kết thừa R_s (s = 1, 2,... n):

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{g_{si}}{I_i} + \sum_{k=1}^{n}R_k\sum_{i=1}^{r}\frac{f_{ski}}{I_i} = 0 \qquad (2.70)$$

Trong đó: số hạng thứ nhất ở vế trái là kết quả của phép nhân hàng thứ s của ma trận $\left[\mathbf{B}_1'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_o\right]$ với vectơ P.

Tổng $\sum_{i=1}^{r}\frac{f_{ski}}{I_i}$ ở số hạng thứ 2 trong vế trái là phần tử nằm trên hàng thứ s, cột thứ k của ma trận $\left[\mathbf{B}_1'.\mathbf{f}.\mathbf{B}_1\right]$.

Trong các điều kiện ràng buộc (2.66), (2.68), (2.70), biến là các đại lượng A, W, I và R. Nếu hàm giá cả C (phương trình 2.17) được chọn làm hàm mục tiêu, áp dụng hệ thức (2.18a) để biến đổi các biến I và W thành biến A. Nếu hàm giá cả (phương trình 2.19c) được chọn làm hàm mục tiêu, áp dụng các hệ thức (2.18b) để biến đổi các biến A và W thành biến I.

Tóm lại, đối với khung siêu tĩnh, bài toán tối ưu có dạng như sau:

Cực tiểu hóa hàm:

$$C = \sum_{g=1}^{G}C_g\gamma_g L_g A_g$$

hoặc hàm

$$C = 0,559\sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g L_g I_g^{1/2}$$

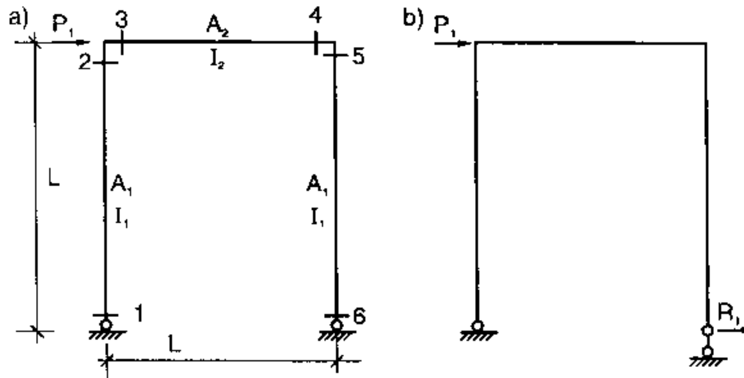
Với điều kiện:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{N_i}{A_i} + \frac{\left(\dfrac{D_{ti}}{W_i} + \sum_{k=1}^{n} e_{tik}.R_k\right)}{W_i} \le \sigma_i^* \\
&i = 1, 2, \dots p \\
&\sum_{g=1}^{G} \frac{1}{I_g} \sum_{i=u_g}^{u'_g} a_{ji} + \sum_{k=1}^{n} R_k \sum_{g=1}^{G} \frac{1}{I_g} \sum_{i=u_g}^{u'_g} b_{jki} \le \Delta_j \\
&\sum_{g=1}^{G} \frac{1}{I_g} \sum_{i=u_g}^{u'_g} g_{si} + \sum_{k=1}^{n} R_k \sum_{g=1}^{G} \frac{1}{I_g} \sum_{i=u_g}^{u'_g} f_{ski} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.71)$$

Trong đó: N_j, D_{ti}, e_{tik}, a_{ji}, b_{jki}, g_{si}, f_{ski}, σ_i^*, Δ_j là những hằng số; u_g, u'_g - số thứ tự của phần tử đầu tiên và số thứ tự của phần tử cuối cùng thuộc nhóm g.

Thí dụ 2.8:

Cho khung siêu tĩnh trên hình (2.16): h = 3000mm; L = 2000mm, E = 207kN/mm², P_1 = 2,07kN. Chuyển vị trên phương lực P_1 không được vượt quá 8mm. Ứng suất cho phép σ^* = 0,1kN/mm². Các cột thuộc nhóm diện tích A_1, dầm thuộc nhóm diện tích A_2.



Hình 2.16

Giải

Hệ cơ bản như trên hình (2.16b). Vectơ tải trọng **P = [P₁]**. Vectơ lực liên kết thừa **R = [R₁]**.

Lần lượt đặt lực P_1 = 1, lực R_1 = 1 lên hệ cơ bản và tiến hành tính nội lực, ta được hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ h \\ -h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_0} . |P_1| + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ h \\ -h \\ h \\ -h \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} . |R_1| \tag{2.72}$$

Gọi I_1, I_2 lần lượt là mômen quán tính của tiết diện cột và tiết diện dầm. Áp dụng các hệ thức (2.60) và (2.61), ta có ma trận độ mềm:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} h/3EI_1 & -h/6EI_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h/6EI_1 & h/3EI_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/3EI_2 & -L/6EI_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L/6EI_2 & L/3EI_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h/3EI_1 & -h/6EI_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h/6EI_1 & h/3EI_1 \end{bmatrix}$$

Từ phương trình (2.72), ta có:

$$\mathbf{B}_0^{'} = [\ 0\ \ h\ \ -h\ \ 0\ \ 0\ \ 0];\ \mathbf{B}_1^{'} = [0\ \ h\ \ -h\ \ h\ \ -h\ \ 0]$$

Thực hiện phép nhân ma trận:

$\mathbf{B}_0^{'}.\mathbf{f} = \{-h^2/6EI_1\ \ h^2/3EI_1\ \ -Lh/3EI_2\ \ Lh/6EI_2\ \ 0\ \ 0\}$

$\mathbf{B}_0^{'}.\ \mathbf{f}.\ \mathbf{B}_o = h^2(h.I_2 + L.I_1)/3EI_1I_2$

$\mathbf{B}_1^{'}.\ \mathbf{f} = \{-h^2/6EI_1\ \ h^2/EI_1\ \ -hL/6EI_2\ \ hL/6EI_2\ \ -h^2/3EI_1\ \ h^2/6EI_1\}$

$\mathbf{B}_1^{'}.\ \mathbf{f}.\ \mathbf{B}_1 = h^2(2hI_2 + 3LI_1)/3EI_1I_2$

$\mathbf{B}_0^{'}.\ \mathbf{f}.\ \mathbf{B}_1 = [B_1^{'}.\mathbf{f}.\ \mathbf{B}_o] = h^2(2hI_2 + 3LI_1)/6EI_1I_2$

Căn cứ vào bất đẳng thức (2.67), ta có điều kiện ràng buộc về độ cứng tại điểm 2 (xem hình 2.16)

$$\frac{h^3P_1}{3EI_1} + \frac{Lh^2P_1}{2EI_2} + \frac{h^3R_1}{3EI_1} + \frac{Lh^2R_1}{2EI_2} \le 8mm \tag{2.73}$$

Áp dụng công thức (2.69), ta có điều kiện ràng buộc về biến dạng liên tục:

$$\frac{h^3P_1}{3EI_1} + \frac{Lh^2P_1}{2EI_2} + \frac{2h^3R_1}{3EI_1} + \frac{Lh^2R_1}{EI_2} = 0 \tag{2.74}$$

Lực dọc trong cột bên trái là lực kéo có giá trị bằng $P_1.h/L$; lực dọc trong cột bên phải là lực nén có giá trị bằng $-P_1.h/L$. Ứng suất pháp trong cột bên trái và cột bên phải lần lượt là $P_1.h/L.A_1$ và $-P_1.h/LA_1$ (các cột thuộc nhóm diện tích A_1).

Căn cứ vào các bất đẳng thức (2.63), (2.66) và phương trình (2.72), ta suy ra các điều kiện ràng buộc về độ bền tại 6 mặt cắt của khung như sau (xem hình 2.16):

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Mặt cắt 1: } \dfrac{P_1 h}{LA_1} \le \sigma_1^* \\ \text{Mặt cắt 2: } \dfrac{P_1 h}{LA_1} + \dfrac{(hP_1 + hR_1)}{W_1} \le \sigma_1^*\end{array}\right\} \text{Phần tử 1} \\ \left.\begin{array}{l}\text{Mặt cắt 3: } \dfrac{(hP_1 + hR_1)}{W_2} \le \sigma_2^* \\ \text{Mặt cắt 4: } \dfrac{hR_1}{W_2} \le \sigma_2^*\end{array}\right\} \text{Phần tử 2} \\ \left.\begin{array}{l}\text{Mặt cắt 5: } \dfrac{-hP_1}{LA_1} + \dfrac{hR_1}{W_1} \le \sigma_3^* \\ \text{Mặt cắt 6: } \dfrac{hP_1}{LA_1} \le \sigma_3^*\end{array}\right\} \text{Phần tử 3}\end{array}\right\} \qquad (2.75)$$

Trong đó: σ_1^*, σ_2^*, σ_3^* - ứng suất pháp cho phép ứng với các phần tử 1, 2, 3. Trong các điều kiện trên, ta bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc đối với dầm (phần tử 2).

Các điều kiện (2.73), (2.74), (2.75) có dạng phi tuyến. Chúng chứa các tỉ số $1/I_1$, $1/I_2$, R_1/I_1, R_1/I_2, $1/A_1$, R_1/W_1, R_1/W_2.

Áp dụng công thức (2.15) ta có hàm mục tiêu:

$$V = \sum_{g=1}^{2} L_g A_g = 2h.A_1 + L.A_2$$

$$V = 6000A_1 + 2000A_2 \qquad (2.76)$$

Để giải bài toán trên đây theo phương pháp đồ thị, trước hết ta khử biến R_1. Từ phương trình (2.74) ta suy ra: $R_1 = -P/2$. Thay các giá trị R_1, P_1, h, L vào điều kiện ràng buộc về độ cứng (2.73), ta được:

$$6/I_1 + 1/I_2 \le 16.10^{-7}/3$$

Vì biến trong hàm mục tiêu là A nên ta áp dụng hệ thức (2.18a) để biến đổi biến I thành biến A. Sau khi rút gọn, bất đẳng thức trên có dạng:

$$1{,}875A_1^{-2} + 0{,}031A_2^{-2} \le 5{,}333.10^{-7} \qquad (2.77)$$

Thay giá trị $R_1 = -P_1/2$ vào các điều kiện (2.75), ta thấy ứng suất pháp có giá trị tuyệt đối lớn nhất xuất hiện tại mặt cắt 5. Thay các giá trị P_1, h, L, σ_3^* vào điều kiện thứ 5 trong hệ bất

đẳng thức (2.75) và áp dụng hệ thức (2.18a) để biến đổi biến W thành biến A. Sau khi chỉnh lí kết quả tính toán, ta được điều kiện ràng buộc về độ bền:

$$0,001A_1^{-1} + 0,689A_1^{-3/2} \leq 1/31050 \tag{2.78}$$

Kết hợp phương trình (2.76) với các điều kiện (2.77), (2.78) ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa hàm

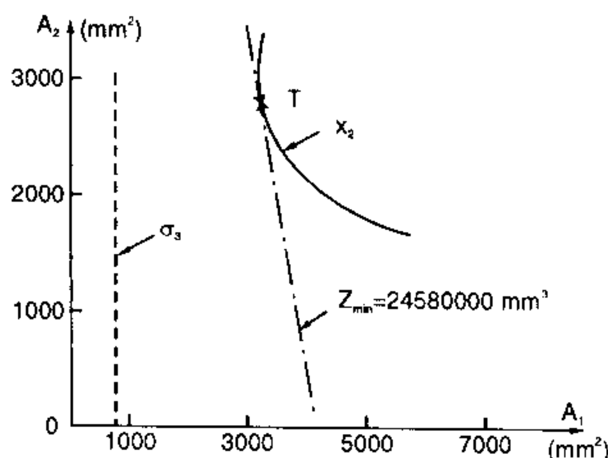
$$Z = 6000A_1 + 2000A_2$$

Với điều kiện:

$$1,875A_1^{-2} + 0,031A_2^{-2} \leq 5,33.10^{-7}$$

$$0,001A_1^{-1} + 0,689A_1^{-1,5} \leq 1/31500$$

Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (2.17). Đường biên x_2 ứng với điều kiện ràng buộc tới hạn về độ cứng tại điểm 2. Đường biên σ_3 ứng với điều kiện ràng buộc tới hạn về độ bền tại mặt cắt 5. Đường mức Zmin = 2458.10^4mm^3 tiếp xúc với đường biên x_2 tại điểm T. Tại đó, A_1 = 3160mm^2, A_2 = 2810mm^2. Vậy phương án tối ưu là: A_1 = 3160mm^2, A_2 = 2810mm^2, thể tích kết cấu nhỏ nhất bằng 2458.10^4mm^3.



Hình 2.17

Thí dụ 2.9:

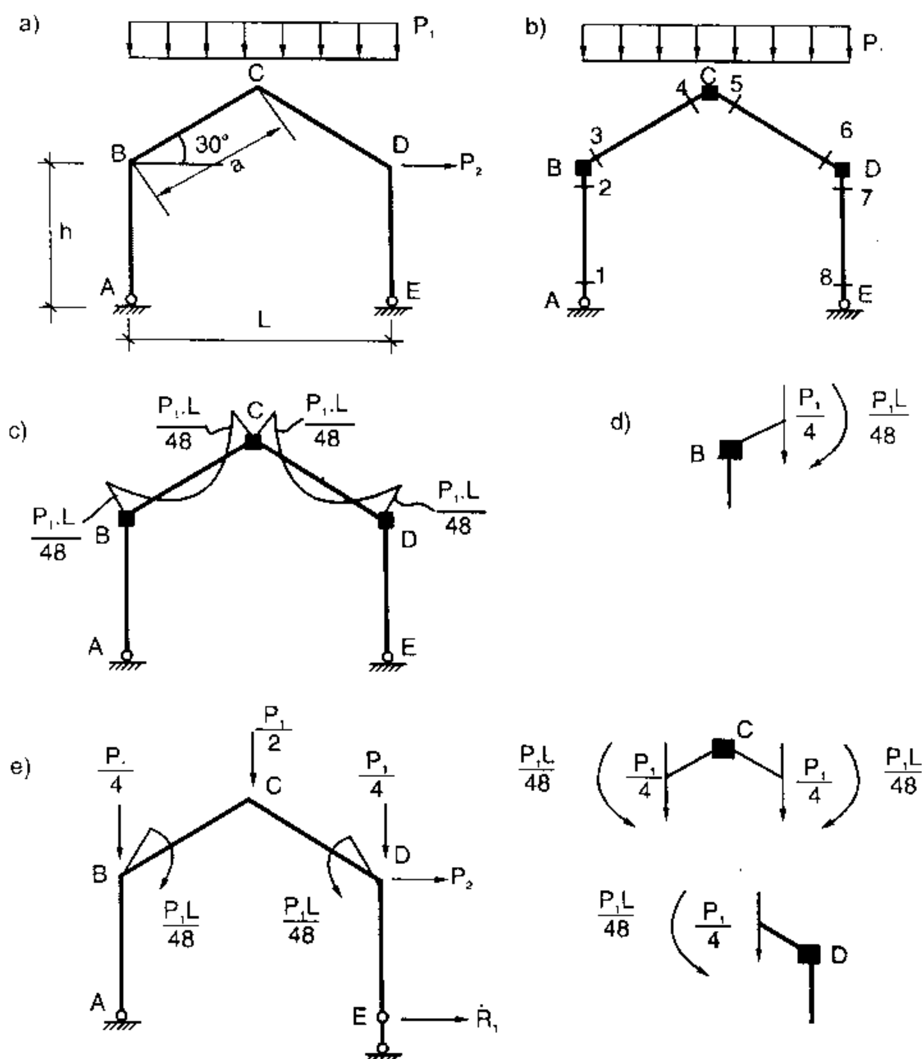
Cho một khung có mái dốc như trên hình (2.18a). Các xà nghiêng chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều với hợp lực bằng P_1, L = 20000mm, h = 10000mm, P_2 = 6kN, E = 207kN/mm^2. Chuyển vị cho phép trên phương nằm ngang tại điểm D bằng 30mm. Các cột thuộc nhóm đặc trưng hình học I_1, A_1, W_1. Các xà thuộc nhóm đặc trưng hình học I_2, A_2, W_2. Ứng suất pháp cho phép bằng 0,1kN/mm^2.

Giải

Trước hết, ta nhận thấy khung có một liên kết thừa và các phần tử BC, CD chịu tác dụng trực tiếp của tải trọng phân bố. Vậy phải xử lí như đã trình bày trong §6.1. Các hình (2.18b), (2.18c) biểu thị trạng thái ngàm của khung. Phản lực tại các liên kết phụ gia biểu thị trên hình (2.18d). Trạng thái tự do biểu thị trên hình (2.18e).

Theo sự phân tích trên, nội lực trong khung thực (hình 2.18a) bằng tổng của nội lực ứng với hình (2.18c) và nội lực ứng với hình (2.18e).

Căn cứ vào biểu đồ nội lực trên hình (2.18c) và biểu đồ nội lực trên hình (2.18e) (trên hình này chỉ biểu thị các lực tác dụng) ta suy ra hệ thức ma trận sau:



Hình 2.18

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \\ -L/48 & -h \\ 7L/48 & \left(\sqrt{3}h+1\right)/2\sqrt{3} \\ -7L/48 & -\left(\sqrt{3}h+1\right)/2\sqrt{3} \\ L/48 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B_0}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ h \\ -h \\ \left(2\sqrt{3}h+L\right)/2\sqrt{3} \\ -\left(2\sqrt{3}h+L\right)/2\sqrt{3} \\ h \\ -h \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B_1}} . \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Căn cứ vào hệ thức (2.60) ta có ma trận mềm:

$$f = \begin{bmatrix} h/3EI_1 & -h/6EI_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h/6EI_1 & h/3EI_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/3EI_2 & -a/6EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a/6EI_2 & a/3EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a/3EI_2 & -a/6EI_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a/6EI_2 & a/3EI_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h/3EI_1 & -h/6EI_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h/6EI_1 & h/3EI_1 \end{bmatrix}$$

Trong đó: a là độ dài của phần tử BC hoặc phần tử CD, a = 11548 mm.

Căn cứ vào bất đẳng thức (2.67) và các kết quả trên, ta có điều kiện ràng buộc về độ cứng tại điểm D:

$$\frac{P_1La\left(8+\sqrt{3}h+5L\right)}{32EI_2}+\frac{P_1h^3}{3EI_1}+\frac{P_1a\left[2h^2\left(3+\sqrt{3}\right)+3\sqrt{3}Lh+L^2\right]}{18EI_2}+$$
$$+\frac{aR_1\left(36h^2+9\sqrt{3}hL+2L^2\right)}{36EI_2}+\frac{h^3R_1}{3EI_1}\le 30mm \qquad (2.79)$$

Áp dụng công thức (2.69), ta có điều kiện ràng buộc về biến dạng liên tục:

$$\frac{aL\left(16\sqrt{3}h+5L\right)P_1}{96\sqrt{3}EI_2}+\frac{a\left(36h^2+9\sqrt{3}Lh+2L^2\right)P_2}{36EI_2}+$$
$$+\frac{h^3P_2}{3EI_1}+\frac{2h^3R_1}{3EI_1}+\frac{a\left(36h^2+6\sqrt{3}hL+L^2\right)R_1}{18EI_2}=0 \qquad (2.80)$$

Điều kiện ràng buộc về độ bền ở đây đóng vai trò rất thứ yếu nên không xét đến.

Các điều kiện trên có dạng phi tuyến. Chúng chứa các tỉ số $1/I_1$, $1/I_2$, R_1/I_1, R_1/I_2.

Sau khi áp dụng hệ thức (2.18) để biến đổi biến A thành biến I, ta có hàm mục tiêu:

$$V = 20.000A_1 + 23096A_2$$

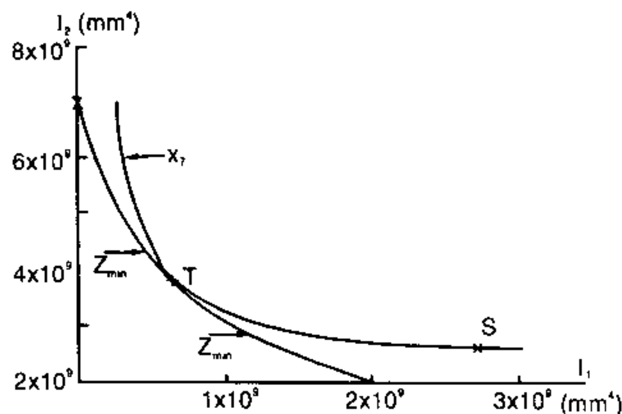
$$\Rightarrow \qquad V = 11180I_1^{1/2} + 12910,66I_2^{1/2}$$

Đặt V = 11180 Z, ta có:

$$Z = I_1^{1/2} + 1,154I_2^{1/2} \qquad (2.81)$$

Vậy, bài toán tối ưu là: cực tiểu hóa hàm mục tiêu (2.81) thỏa mãn các điều kiện ràng buộc (2.79), (2.80).

Để có thể giải theo phương pháp đồ thị, ta khử biến R_1. Từ phương trình (2.80) ta biểu thị biến R_1 là hàm của 2 biến I_1 và I_2. Sau đó, thay biểu thức R_1 vào điều kiện (2.79). Lúc này, điều kiện ràng buộc về độ cứng chỉ chứa 2 biến I_1 và I_2.



Hình 2.19

Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (2.19). Đường cong x_7 ứng với điều kiện ràng buộc tới hạn (2.79). Đường mức Zmin tiếp xúc với đường cong này tại điểm T. Điểm này ứng với phương án tối ưu:

$$I_1 = 0{,}8.10^9 mm^4$$

$$I_2 = 3{,}5.10^9 mm^4$$

Zmin = $9{,}65.10^4$ mm^3, do đó thể tích kết cấu cực tiểu Vmin = 1,07887m^3.

§7. MỘT SỐ ĐIỀU CẦN CHÚ Ý KHI GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC

Qua các bài toán tối ưu trên đây, ta thấy rằng biến xuất hiện dưới dạng các tỉ số như $1/A_g$, $1/I_g$, R_k/A_g, R_k/I_g...

Ta chú ý rằng các biến A_g, I_g luôn luôn không âm theo ý nghĩa vật lí, nhưng biến R_k (lực liên kết thừa) có thể âm hoặc dương. Giả sử biến A_g hoặc I_g nào đó triệt tiêu thì nghịch đảo của nó sẽ trở thành vô cùng lớn. Vậy để bài toán có phương án tối ưu, ta xử lí như sau:

Trước hết, phải thấy rằng bài toán (2.31) áp dụng cho hệ giàn tĩnh định luôn luôn có phương án tối ưu vì biến A_g thỏa mãn điều kiện $A_g \geq \min A_g$, cận dưới này có thể xác định từ các điều kiện bền (xem các thí dụ (2.1), (2.2)).

Đối với bài toán (2.54) áp dụng cho hệ dàn siêu tĩnh, ta xử lí như sau:

1) Đưa biến mới không âm y_g sao cho

$$A_g = y_g + \min A_g \qquad (2.82)$$

$$y_g \geq 0$$

Khi $y_g = 0 \Rightarrow A_g = \min A_g$, $\min A_g$ là cận dưới của A_g. Cận trên của y_g xác định từ hệ thức (2.82):

$$\max y_g = \max A_g - \min A_g \qquad (2.83)$$

Trong đó, $\max A_g$ là cận trên của A_g.

2) Đối với biến xuất hiện dưới dạng R_k/A_g, ta thay A_g bằng hệ thức (2.82) và đưa vào 2 biến mới x_{kg} và r_k sao cho:

$$x_{kg} + B_{kg} = \frac{R_k}{A_g} = \frac{r_k + d_k}{y_g + \min A_g}$$
$$x_{kg} \geq 0 \qquad r_k \geq 0 \tag{2.84}$$

Trong đó, B_{kg} và d_k là những hằng số. Khi biến $r_k = 0$, $R_k = r_k + d_k = d_k$. Vậy d_k là cận dưới của R_k. Mặt khác, $R_k = \max R_k$ khi $r_k = \max r_k$. Vậy, cận trên của r_k bằng

$$\max r_k = \max R_k - \min R_k \tag{2.85}$$

Cận trên và cận dưới của $(x_{kg} + B_{kg})$ xác định như sau: Từ hệ thức (2.84), ta thấy rằng $x_{kg} + B_{kg}$ đạt đến cực đại khi $y_g + \min A_g$ đạt đến cực tiểu và khi $r_k + d_k$ đạt đến cực đại. Điều này xảy ra khi $y_g = 0$ và $r_k = \max r_k$.

Vậy:

$$\max (x_{kg} + B_{kg}) = (\max r_k + d_k)/\min A_g \tag{2.86}$$

Mặt khác, $(x_{kg} + B_{kg})$ đạt đến cực tiểu khi $r_k + d_k$ đạt đến cực tiểu và $y_g + \min A_g$ đạt đến cực đại. Điều này xảy ra khi $r_k = 0$ và y_g đạt đến $\max y_g = \max A_g - \min A_g$ (hệ thức 2.83). Vậy

$$\min (x_{kg} + B_{kg}) = d_k / \max A_g \tag{2.87}$$

Nếu chọn $\min x_{kg} = 0 \Rightarrow$

$$\min (x_{kg} + B_{kg}) = \min B_{kg} = d_k/\max A_g \qquad 2.88)$$

Đối với bài toán (2.71) áp dụng cho hệ khung siêu tĩnh, ta cũng làm tương tự như trên nhưng thay biến A_g bằng biến I_g.

Chương ba

BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Như đã trình bày trong chương hai, giải bài toán tối ưu theo phương pháp lực đòi hỏi phải thành lập hệ cơ bản, thành lập các ma trận ảnh hưởng nội lực và tiến hành nhiều phép tính ma trận. Đồng thời, biến xuất hiện dưới các dạng $1/A_g$, $1/I_g$, R_k/A_g, R_k/I_g làm cho bài toán trở nên phức tạp do phải đưa vào nhiều biến mới.

Như ta sẽ thấy trong phần sau, giải bài toán tối ưu theo phương pháp chuyển vị đơn giản hơn so với phương pháp lực. Việc thành lập ma trận biến đổi chuyển vị và ma trận độ cứng tổng thể có thể tiến hành trên cơ sở các công thức đã được thiết lập sẵn.

Chương này sẽ giới thiệu cách giải bài toán tối ưu theo phương pháp chuyển vị.

§1. BÀI TOÁN TỐI ƯU ÁP DỤNG CHO HỆ GIÀN

§ 1.1. Phương pháp chuyển vị dưới dạng ma trận

1. Ma trận biến đổi chuyển vị

Giả sử một phần tử thứ i bất kì của giàn biểu thị như trên hình (3.1). Đầu 1 của nó quy tụ vào nút R và đầu 2 quy tụ vào nút S.

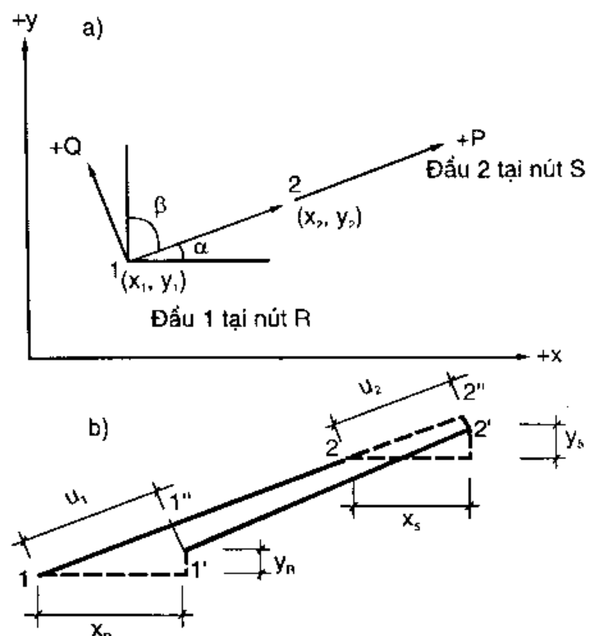
Hệ tọa độ cục bộ là P và Q, hệ tọa độ chung là X và Y. Trục P trùng với trục của phần tử i và có chiều dương hướng từ đầu 1 đến đầu 2.

Từ hình (3.1a), ta có độ dài của phần tử i:

$$l = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \qquad (3.1)$$

Giả sử do một nguyên nhân bên ngoài nào đó, các nút R và S của giàn có các chuyển vị tương ứng là x_R, y_R và x_S, y_S (hình 3.1b)

Do các nút R, S chuyển vị, các đầu 1 và 2 của phần tử i di chuyển dọc trục những đoạn tương ứng là u_1 và u_2.



Hình 3.1

Biến dạng dọc của phần tử i là:

$$u_i = u_1 - u_2 \tag{3.2}$$

Từ hình (3.1b), ta có:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_R \cos\alpha + y_R.\sin\alpha \\ u_2 &= x_S \cos\alpha + y_S.\sin\alpha \end{aligned} \tag{3.3}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X_2 - X_1}{L} \\ \sin\alpha &= \frac{Y_2 - Y_1}{L} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Thay u_1, u_2 từ hệ thức (3.3) vào hệ thức (3.2), ta có:

$$u_i = x_S.\cos\alpha + y_S.\sin\alpha - x_R \cos\alpha - y_R.\sin\alpha$$

Dưới dạng ma trận, hệ thức trên có thể viết:

$$u_i = [\underbrace{-\cos\alpha_i \quad -\sin\alpha_i}_{\text{tại nút R}} \; \ldots \; \underbrace{\cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i}_{\text{tại nút S}}].\{x_R \quad y_R \; \ldots \; x_S \quad y_S\}$$

Vectơ hàng $[-\cos\alpha_i \quad -\sin\alpha_i \; \ldots \; \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i]$

gọi là *ma trận biến đổi chuyển vị* ứng với phần tử i.

Đối với toàn bộ giàn, hệ thức ma trận giữa vectơ biến dạng của các phần tử U và vectơ chuyển vị của các nút X có dạng như sau:

$$\mathbf{U = A.\ X} \tag{3.6}$$

Trong đó:

A- ma trận biến đổi chuyển vị ứng với toàn bộ giàn.

Phương trình (3.5), (3.6) có thể mở rộng cho hệ giàn không gian. Lúc này, biến dạng của phần tử i có dạng như sau:

$$U_i = [-\cos\alpha_i \quad -\cos\beta_i \quad -\cos\gamma_i \ldots \cos\alpha_i \quad \cos\beta_i \quad \cos\gamma_i].\{x_r \quad y_r \quad z_r \ldots x_s \quad y_s \quad z_s\} \tag{3.7}$$

Trong đó:

α, β, γ lần lượt biểu thị các góc tạo thành giữa trục dương của phần tử i và các trục X, Y, Z của hệ tọa độ chung;

x_R, y_R, z_R- chuyển vị của nút giàn R theo phương các trục X, Y, Z của hệ tọa độ chung;

x_s, y_s, z_s- chuyển vị của nút giàn S theo phương các trục X, Y, Z.

Tương tự như trên, ta có:

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \tag{3.8}$$

$$\cos\alpha = \frac{X_2 - X_1}{L},\ \cos\beta = \frac{Y_2 - Y_1}{L},\ \cos\gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \quad (3.9)$$

Thí dụ:

Cho một giàn như trên hình (3.2). Số thứ tự các nút giàn đánh dấu bằng các khoanh tròn. Số thứ tự của các phần tử đánh dấu bằng các số bên cạnh các mũi tên. Trục dương của mỗi phần tử hướng từ đầu 1 đến đầu 2 của phần tử đó.

Phần tử 1:

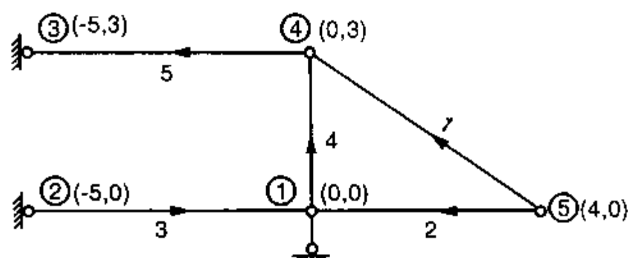
Áp dụng công thức (3.1), ta có

$$L_1 = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} = 5$$

Áp dụng công thức (3.5)

$\cos\alpha_1 = (0 - 4)/5 = -0,8$

$\sin\alpha_1 = (3 - 0)/5 = 0,6$



Hình 3.2

Bảng 3.1

Phần tử	L	cosα	sinα
1	5	- 0,8	0,6
2	4	-1	0
3	5	1	0
4	3	0	1
5	5	-1	0

Đặc trưng hình học của các phần tử ghi trong bảng 3.1.

Đầu 1 của phần tử 1 quy tụ vào nút R = 5, đầu 2 quy tụ vào nút S = 4

Do đó, áp dụng hệ thức (3.5), ta có;

$U_1 = [-\ 0,8\ \ -0,6\ ...\ -0,8\ \ 0,6].\{x_5\ \ y_5\ ...\ x_4\ \ y_4\}$

Phần tử 2:

Đầu 1 của phần tử 2 quy tụ vào nút R = 5, đầu 2 quy tụ vào nút S = 1. Căn cứ vào hệ thức (3.5) và các số liệu trong bảng (3.1), ta có:

$$U_2 = [-(-1)\ \ 0\ \ -1].\ \{x_5\ \ y_5\ ...\ x_1\}$$

Trong phương trình ma trận trên đây, chuyển vị thẳng y_1 trên phương thẳng đứng tại nút 1 bằng không nên không đưa vào.

Phần tử 3:

Tương tự như trên, ta có:

$U_3 = [1].\ \{x_1\}$ (chú ý nút 2 không có chuyển vị)

Phần tử 4:

$$U_4 = [0\ \ 0\ \ 1]\ .\ \{x_1\ \ x_4\ \ y_4\}$$

Phần tử 5:

$$U_5 = [-(-1)\ \ 0]\ .\ \{x_4\ \ y_4\}$$

Kết hợp các hệ thức trên, hệ thức ma trận giữa vectơ biến dạng U và vectơ chuyển vị X của các nút giàn có thể viết:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\text{Tại nút 1}} & \underbrace{\begin{matrix} -0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{\text{Tại nút 4}} & \underbrace{\begin{matrix} 0,8 & -0,6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{\text{Tại nút 5}} \end{bmatrix}}_{A} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Trong đó, ma trận biến đổi chuyển vị A ứng với toàn bộ giàn có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0,8 & 0,6 & 0,8 & -0,6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) *Ma trận độ cứng*

Lực dọc trong phần tử i có thể viết: $N_i = \frac{E_i A_i}{L_i} . U_i$ (3.10)

Trong đó: E_i, A_i, L_i, U_i lần lượt là mô đuyn đàn hồi, diện tích tiết diện, chiều dài, biến dạng dọc của phần tử i.

Đối với toàn bộ giàn, hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực **S** và vectơ biến dạng **U** có thể viết:

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}.\ \mathbf{U} \qquad (3.11)$$

hay:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \dots \\ N_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_1A_1L_1 & & & & O \\ & E_2A_2L_2 & & & \\ & & E_3A_3L_3 & & \\ & & & \dots & \\ & O & & & E_mA_mL_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Trong đó, ma trận độ cứng **k** có dạng ma trận chéo:

$$k = \begin{bmatrix} E_1A_1L_1 & & & & O \\ & E_2A_2L_2 & & & \\ & & E_3A_3L_3 & & \\ & & & \dots & \\ & O & & & E_mA_mL_m \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

Thay **U** từ phương trình (3.6) vào phương trình (3.11), ta có:

$$\mathbf{S = k. A. X} \qquad (3.13)$$

3) *Ma trận độ cứng tổng thể*

Gọi P là vectơ tải trọng và X là vectơ chuyển vị. Trong trường hợp tổng quát, ta có:

$$\mathbf{P} = \{P_{1x}\, P_{1y}\, P_{1z} \ldots P_{ix}\, P_{iy}\, P_{iz} \ldots P_{nx}\, P_{ny}\, P_{nz}\}$$

$$\mathbf{X} = \{x_1\, y_1\, z_1 \ldots x_i\, y_i\, z_i \ldots x_n\, y_n\, z_n\}$$

Trong đó:

P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} - các thành phần tải trọng tại nút i trên các phương X, Y, Z của hệ tọa độ chung;

x_i, y_i, z_i - các thành phần chuyển vị tương ứng tại nút i của giàn. Áp dụng nguyên lí cân bằng giữa công của ngoại lực và thế năng biến dạng đàn hồi, ta có:

$$1/2\mathbf{P'}.\ \mathbf{X} = 1/2.\mathbf{S'}.\ \mathbf{U}$$

Thay U từ phương trình (3.6) và S từ phương trình (3.13) vào phương trình trên, ta có:

$$\mathbf{P'X = X'.A'.k'.A.X \Rightarrow P' = (A'.\ k.\ A.\ X)'}$$

Đặt $\mathbf{K = A'.\ k.\ A}$ (3.14)

ta có: $\mathbf{P = K.\ X}$ (3.15)

Ta gọi **K** là *ma trận cứng tổng thể* của giàn.

Có thể lập ma trận **K** bằng 2 cách sau:

a) Thực hiện các phép nhân ma trận theo trình tự nêu trong công thức (3.14).

b) Xem mỗi phần tử của giàn có phần đóng góp riêng vào ma trận **K**.

Như trong phần trước đã trình bày, phần đóng góp của phần tử i vào ma trận biến đổi chuyển vị A có dạng như sau:

$$A_i = [\underbrace{-\cos\alpha_i \quad -\cos\beta_i \quad -\cos\gamma_i}_{\text{tại nút R}} \;\ldots\; \underbrace{\cos\alpha_i \quad \cos\beta_i \quad \cos\gamma_i}_{\text{tại nút S}}] \qquad (3.16)$$

Sau khi nhân bên phải ma trận k ở công thức (3.12) với ma trận A, ta thấy phần đóng góp của phần tử i vào ma trận [**kA**] có dạng như sau:

$$(\mathbf{kA})_i = [\underbrace{-a_i\cos\alpha_i \quad -a_i\cos\beta_i \quad -a_i\cos\gamma_i}_{\text{tại nút R}} \;\ldots\; \underbrace{a_i\cos\alpha_i \quad a_i\cos\beta_i \quad a_i\cos\gamma_i}_{\text{tại nút S}}] \qquad (3.17)$$

Trong đó: $$a_i = \frac{E_i.A_i}{L_i} \qquad (3.18)$$

Sau khi nhân ma trận A' với ma trận [**kA**] ta thấy phần đóng góp của phần tử i vào ma trận độ cứng tổng thể **K** có dạng như sau:

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} K_{rr} & \dots & K_{rs} \\ \dots & & \dots \\ K_{sr} & & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Tại nút R} \\ \\ \text{Tại nút S} \end{matrix} \tag{3.19}$$

$$\qquad\quad \text{Tại nút R} \quad \text{Tại nút S}$$

Trong đó:

$$K_{rr} = \begin{bmatrix} a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos^2\beta_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \tag{3.20a}$$

$$K_{rs} = \begin{bmatrix} -a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos^2\beta_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & -a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \tag{3.20b}$$

$$K_{sr} = \begin{bmatrix} -a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & -a_i\cos^2\beta_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ -a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & -a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & -a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \tag{3.20c}$$

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\beta_i & a_i\cos^2\beta_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i \\ a_i\cos\alpha_i\cos\gamma_i & a_i\cos\beta_i\cos\gamma_i & a_i\cos^2\gamma_i \end{bmatrix} \tag{3.20d}$$

Đối với giàn phẳng, vì $\cos\beta_i = \sin\alpha_i$ và không có số hạng $\cos\gamma_i$ nên phần đóng góp của phần tử i vào ma trận độ cứng tổng thể K có dạng như sau:

$$K_i = \begin{matrix} \text{tại} \\ \text{nút} \\ \text{R} \\ \\ \text{tại} \\ \text{nút} \\ \text{S} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & \dots & a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i \\ a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & a_i\sin^2\alpha_i & \dots & -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & a_i\sin^2\alpha_i \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ -a_i\cos^2\alpha_i & -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & \dots & a_i\cos^2\alpha_i & a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i \\ -a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & -a_i\sin^2\alpha_i & \dots & a_i\cos\alpha_i\sin\alpha_i & a_i\sin^2\alpha_i \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{tại nút R}} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{tại nút S}}$$

§1.2. Bài toán tối ưu tính hệ giàn

Khi giải theo phương pháp chuyển vị, bài toán tối ưu tính giàn bao gồm 3 loại điều kiện ràng buộc:

1) Điều kiện ràng buộc về độ bền.

2) Điều kiện ràng buộc về độ cứng.

3) Điều kiện ràng buộc về cân bằng.

1) Điều kiện ràng buộc về độ bền

Để đảm bảo yêu cầu về độ bền, mỗi phần tử i của giàn phải thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} = E_i \frac{U_i}{L_i} \le \sigma_i^* \tag{3.22}$$

Trong đó: σ_i, N_i, A_i, σ_i^* lần lượt là ứng suất pháp, lực dọc, diện tích tiết diện, ứng suất cho phép ứng với phần tử i.

Đối với toàn bộ giàn, điều kiện (3.22) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{T.\,U = [T.\,A].\,X \le \sigma^*} \qquad 3.23)$$

Trong đó: σ^* là vectơ ứng suất cho phép; **T** là ma trận chéo có dạng sau đây:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} E_1L_1 & & & & \\ & E_2L_2 & & O & \\ & & \ddots & & \\ & O & & E_iL_i & \\ & & & & E_mL_m \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Ta lập ma trận **[T.A]** như sau. Nhân bên phải ma trận **T** ở hệ thức (3.24) với ma trận biến đổi chuyển vị A, ta thấy phần đóng góp của phần tử i vào ma trận **[TA]** có dạng như sau:

$$\mathbf{[TA]} = [-t_i\cos\alpha_i \;\; -t_i\cos\beta_i \;\; -t_i\cos\gamma_i \;\ldots\; t_i\cos\alpha_i \;\; t_i\cos\beta_i \;\; t_i\cos\gamma_i] \tag{3.25}$$

Trong đó: $t_i = E_i/L_i$ (3.26)

Đối với giàn phẳng, vì $\cos\beta_i = \sin\alpha_i$ và không có $\cos\gamma_i$ nên hệ thức (3.25) có dạng:

$$\mathbf{[TA]}_i = [-t_i\cos\alpha_i \;\; -t_i\sin\alpha_i \;\ldots\; t_i\cos\alpha_i \;\; t_i\sin\alpha_i] \tag{3.27}$$

2) *Điều kiện ràng buộc về độ cứng*

Để đảm bảo yêu cầu về độ cứng, chuyển vị tại một số nút giàn nào đó không được vượt quá chuyển vị cho phép. Dưới dạng ma trận, điều kiện ràng buộc này có thể viết:

$$\mathbf{X} \le \Delta \tag{3.28}$$

Trong đó: Δ là vectơ chuyển vị cho phép.

3) *Điều kiện ràng buộc về cân bằng*

Áp dụng phương trình (3.15), ta có điều kiện ràng buộc về cân bằng:

$$\mathbf{P = K.\,X} \tag{3.29}$$

Đối với hàm mục tiêu, có thể áp dụng công thức (2.17) trong chương hai.

§1.3. Xử lí trường hợp biến âm

Bài toán quy hoạch toán học thường không cho phép xuất hiện biến âm. Vì vậy, đối với biến âm, cần có biện pháp xử lí.

Trong một số trường hợp đơn giản, có thể phán đoán được dấu của biến nhưng trong những trường hợp phức tạp, không thể làm được điều đó.

Trong bài toán tối ưu tính giàn theo phương pháp chuyển vị, có khả năng xảy ra một số trường hợp sau đây:

1) Dấu của chuyển vị tại một điểm nào đó chưa rõ (có thể dương hoặc âm).

2) Dấu của ứng suất trong một phần tử nào đó chưa rõ (có thể dương hoặc âm).

Giả sử x_R là chuyển vị tại nút R của giàn. Khi chưa rõ dấu của x_R ta đặt:

$$x_R = \gamma_R - e_R \tag{3.30}$$

Trong đó: e_R biểu thị giá trị chuyển vị cho phép tại nút R. Để thỏa mãn yêu cầu về độ cứng, phải thỏa mãn điều kiện:

$$|x_R| \leq e_R \text{ hay } -e_R \leq x_R \leq e_R$$

Thay x_R bằng hệ thức (3.30), bất đẳng thức trên đây có thể viết:

$$0 \leq \gamma_R \leq 2e_R \tag{3.31}$$

Nếu dấu của x_R khẳng định là âm, cần thỏa mãn điều kiện:

$$-e_R \leq x_R \leq 0$$

Thay x_R bằng hệ thức (3.30), ta có:

$$0 \leq \gamma_R \leq e_R \tag{3.32}$$

Đối với ứng suất, ta xử lí như sau: Gọi $\sigma^*_{ik}, \sigma^*_{in}$ là ứng suất kéo cho phép và ứng suất nén cho phép của một phần tử i nào đó trong giàn. Để đảm bảo yêu cầu về độ bền, ta phải có:

$$\left|[\mathbf{TA}]_i.\mathbf{X}\right| \leq \sigma^*_{ik} \text{ hoặc } \sigma^*_{in}$$

Trong đó, $[\mathbf{TA}]_i$ là hàng thứ i của ma trận $[\mathbf{TA}]$. Bất đẳng thức trên có thể viết:

$$-\sigma^*_{in} \leq [\mathbf{TA}]_i.\mathbf{X} \leq \sigma^*_{ik} \text{ hay}$$

$$\begin{aligned} &[\mathbf{TA}]_i.\mathbf{X} \leq \sigma^*_{ik} && \text{(a)} \\ -&[\mathbf{TA}]_i.\mathbf{X} \leq \sigma^*_{in} && \text{(b)} \end{aligned} \tag{3.33}$$

§1.4. Thí dụ tính toán

Thí dụ 3.1

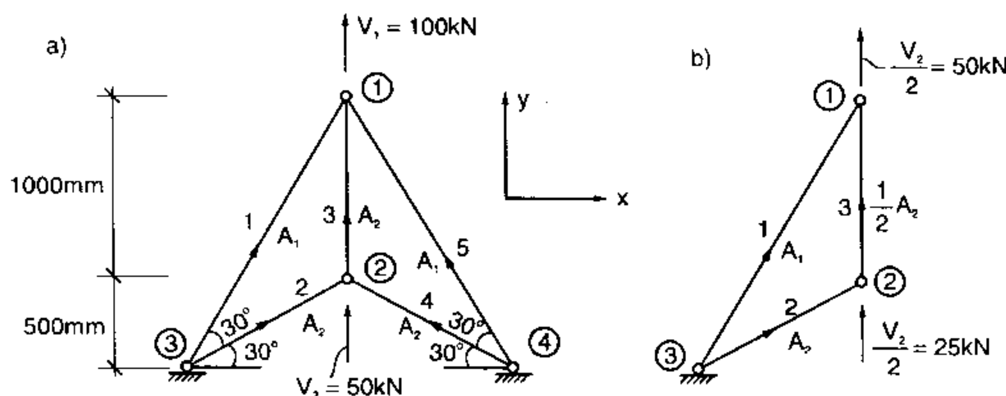
Cho một giàn với tải trọng, kích thước, đặc trưng hình học biểu thị như trên hình (3.3a). Chuyển vị cho phép tại nút 1 và nút 2 bằng 5mm.

Giải

Trước hết, ta nhận thấy giàn có tính chất đối xứng nên sơ đồ tính biểu thị như trên hình (3.3b). Mặt khác, các thành phần chuyển vị thẳng trên phương nằm ngang tại các nút 1 và 2 bằng không. Vì hợp lực tải trọng hướng lên trên nên có thể khẳng định rằng các thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại các nút 1 và 2 đều mang dấu dương.

Ta thành lập bài toán tối ưu như sau:

1) Hàm mục tiêu.



Hình 3.3

Từ hình (3.3a), ta có:

$$L_1 = 1500.2/\sqrt{3} = 1732\text{mm}$$

$$L_2 = 2.500 = 1000\text{mm}$$

$$L_3 = 1000\text{mm}.$$

Áp dụng công thức (2.15) (xem chương hai), ta có hàm mục tiêu (tính cho nửa giàn):

$$V = \sum_{g=1}^{2} L_g A_g = 1732A_1 + 1500A_2 \tag{3.34}$$

2) Điều kiện ràng buộc về độ cứng.

Áp dụng bất đẳng thức (3.28):

$$\mathbf{X} \leq \Delta \Rightarrow y_1 \leq 5\text{mm};\ \ y_2 \leq 5\text{mm} \tag{3.35}$$

3) Điều kiện ràng buộc về cân bằng

Trước hết, ta thành lập các ma trận **k, A** và **K**. Ma trận độ cứng k có dạng:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} EA_1/1732 & & \\ & EA_2/1000 & \\ & & EA_2/2000 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Thành lập ma trận **A**:

Đặc trưng hình học của các phần tử 1, 2, 3 ghi trong bảng (3.2)

Bảng 3.2

Phần tử	L(mm)	cosα	sinα
1	1732	0,5	0,866
2	1000	0,866	0,5
3	1000	0	1

Phần tử 1:

Phần tử 1 quy tụ vào nút R = 3 và nút S = 1. Chú ý rằng chuyển vị tại nút 3 bằng không và tại nút 1 chỉ có thành phần chuyển vị y_1.

Áp dụng công thức (3.5), ta có:

$U_1 = [\sin\alpha_1] . \{y_1\} = 0{,}866.y_1$

Phần tử 2:

Phần tử 2 quy tụ vào nút R = 3 và nút S = 2. Nút 3 không có chuyển vị và tại nút 2 chỉ có thành phần chuyển vị y_2. Áp dụng công thức (3.5), ta có:

$$U_2 = [\sin\alpha_2] . \{y_2\} = 0{,}5.y_2$$

Phần tử 3:

Phần tử 3 quy tụ vào nút R = 2 và nút S = 1. Áp dụng công thức (3.5):

$$U_3 = [-\sin\alpha_3 \quad \sin\alpha_3] . \{y_2 \quad y_1\}$$

$$U_3 = [-1 \quad 1] . \{y_2 \quad y_1\}$$

Kết hợp các phương trình trên đây, ta được hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} . \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}$$

Vậy ma trận biến đổi chuyển vị **A** có dạng:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhân bên phải ma trận **k** ở hệ thức (3.36) với ma trận **A**, ta được:

$$\mathbf{k.A} = \begin{bmatrix} EA_1/2000 & 0 \\ 0 & EA_2/2000 \\ EA_2/2000 & -EA_2/2000 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển vị của ma trận A:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhân bên phải ma trận A' với ma trận [kA], ta được ma trận độ cứng toàn bộ:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}'.\mathbf{k}.\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{3}A_1 + 2A_2\right)E/4000 & -EA_2/2000 \\ -EA_2/2000 & 3EA_2/4000 \end{bmatrix}$$

Áp dụng phương trình (3.29), ta có điều kiện ràng buộc về cân bằng:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} V_1/2 \\ V_2/2 \end{bmatrix} = \mathbf{K.X} = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{3}A_1 + 2A_2\right)E/4000 & -EA_2/2000 \\ -EA_2/2000 & 3EA_2/4000 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Thay $V_1 = 100kN$, $V_3 = 50kN$ và $E = 207kN/mm^2$ vào phương trình trên, ta được:

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}A_1y_1 + 2A_2y_1 - 2A_2y_2 &= 966 \\ &-2A_2y_1 + 3A_2y_2 &= 483 \end{aligned} \qquad (3.37)$$

Căn cứ vào phương trình (3.34)và các điều kiện ràng buộc (3.35), (3.37) đồng thời đặt $A_1 = x_1$, $y_1 = x_2$, $A_2 = x_3$, $y_2 = x_4$, $V = Z$, ta có bài toán tối ưu:

Cực đại hóa hàm:

$$Z' = -Z = -1732x_1 - 1500x_3 \qquad (a)$$

Với điều kiện:

$$\sqrt{3}x_1.x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 = 966 \qquad (b)$$

$$-2x_2x_3 + 3x_3x_4 = 483 \qquad (c)$$

$$x_2 \le 5 \quad x_4 \le 5 \qquad (d)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \qquad (e)$$

Để giải bài toán phi tuyến trên đây bằng phương pháp đơn hình, ta tuyến tính hóa các hàm (3.38b), (3.38c) bằng chuỗi Taylor (xem §5.1 chương 1).

Hàm (3.38b):

$$g_1(x) = \sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 966 \qquad \Rightarrow$$

$$\nabla g_1(x) = \left[\sqrt{3}x_2 \quad \left(\sqrt{3}x_1 + 2x_3\right) \quad \left(2x_2 - 2x_4\right) \quad -2x_3\right]$$

Hàm (3.38c):

$$g_2(x) = -2x_2x_3 + 3x_3x_4 - 483 \qquad \Rightarrow$$

$$\nabla g_2(x) = \left[0 \quad -2x_3 \quad \left(-2x_2 + 3x_4\right) \quad 3x_3\right]$$

Giả sử xuất phát từ điểm $\{x_o\}$ với $x_{10} = 100mm^2$, $x_{20} = 6mm$, $x_{30} = 100mm^2$, $x_{40} = 6mm$. Ta có:

$\{x_o\} = \{100 \;\; 6 \;\; 100 \;\; 6\}$.Thay giá trị $\{x_0\}$ vào các phương trình trên, ta được:

$$g_1(x_o) = 73{,}2 \; ; \; g_2(x_o) = 117$$

$$\nabla g_1(x_o) = [10{,}392 \quad 373{,}2 \quad 0 \quad -200]$$

$$\nabla g_2(x_o) = [\,0 \quad -200 \quad 6 \quad 300]$$

Áp dụng công thức (1.68)

Hàm $g_1(x)$:

$$g_1(x_1) = g_1(x_o) + \nabla g_1(x_o).(\{x_1\} - \{x_o\})$$

$$g_1(x_1) = 73,2 + \begin{bmatrix}10,392 & 373,2 & 0 & -200\end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 - 100 \\ x_2 - 6 \\ x_3 - 100 \\ x_4 - 6 \end{bmatrix} = 0$$

Khai triển phương trình trên, ta được:

$$10,392x_1 + 373,2x_2 - 0.x_3 - 200x_4 = 2005,2 \qquad (3.39)$$

Hàm $g_2(x)$:

$$g_2(x_1) = 117 + \begin{bmatrix}0 & -200 & 6 & 300\end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 - 100 \\ x_2 - 6 \\ x_3 - 100 \\ x_4 - 6 \end{bmatrix} = 0$$

Khai triển phương trình trên, ta được:

$$0.x_1 - 200x_2 + 6x_3 + 300x_4 = 1083 \qquad (3.40)$$

Thay các phương trình đã được tuyến tính hóa (3.39), (3.40) vào bài toán phi tuyến (3.38) đồng thời đưa vào các biến giả tạo y_1, y_2 và các biến đệm y_3, y_4. Bài toán (3.38) có dạng sau đây:

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -Z = -1732x_1 - 1500x_3$$

Với điều kiện:

$$\begin{aligned} 10,392x_1 + 373,2x_2 - 0.x_3 - 200x_4 + y_1 &= 2005,2 \\ 0.x_1 - 200x_2 + 6x_3 + 300x_4 + y_2 &= 1083 \\ x_2 + y_3 &= 5 \\ x_4 + y_4 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Các bảng đơn hình trình bày trong bảng (3.3).

Bảng đơn hình cuối cùng cho phương án tối ưu đầu tiên:

$$\{x_1\} = \{x_{11} \;\; x_{21} \;\; x_{31} \;\; x_{41}\} = \{113,9 \;\; 5 \;\; 97,17 \;\; 5\}$$

Tiếp tục thay $\{x_2\}$ vào $\{x_1\}$, $\{x_1\}$ vào $\{x_o\}$ và tiến hành tính toán như đã trình bày trong phần trên.

Sau khi chỉnh lí kết quả tính toán, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính thứ hai:

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -1732x_1 - 1500x_3$$

Bảng 3.3

x_1	x_2	x_3	x_4		
10,392	373,2	0	-200	2005,2	y_1
0	-200	6	300	1083	y_2
0	1	0	0	5	y_3
0	0	0	1	5	y_4
-1732	0	-1500	0	0	-Z'
	x_2	x_3	x_4		
	35,90	0	-19,24	197,2	x_1
	-200	6	300	1083	y_2
	1	0	0	5	y_3
	0	0	1	5	y_4
	62200	-1500	-33150	342000	-Z'
	x_2		x_4		
	35,90		-19,24	197,2	x_1
	-33,334		50	180,5	x_3
	1		0	5	y_3
	0		1	5	y_4
	12200		41850	618500	-Z'
	y_3		x_4		
	-35,90		-19,24	17,7	x_1
	33,334		50	347,17	x_3
	1		0	5	x_2
	0		1	5	y_4
	-12200		41850	557500	-Z'
	y_3		y_4		
			-50	97,17	x_3
			0	5	x_2
			1	5	x_4
			-41850	348250	-Z'

Với điều kiện:

$$8{,}66x_1 + 391{,}64x_2 + 0.x_3 - 194{,}34x_4 + y_1 = 1953{,}5$$
$$0.x_1 - 194{,}34x_2 + 5x_3 + 291{,}51x_4 + y_2 = 968{,}9$$
$$x_2 + y_3 = 5$$
$$x_4 + y_4 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Các bảng đơn hình tương ứng trình bày trong bảng (3.4). Bảng đơn hình cuối cùng cho phương án tối ưu thứ hai:

$$\{x_2\} = \{x_{12}\ \ x_{22}\ \ x_{32}\ \ x_{42}\} = \{112{,}25\ \ \ 5\ \ \ 96{,}63\ \ \ 5\}$$

Nếu tiếp tục lặp lại các bước trên, ta sẽ có phương án tối ưu $\{x_3\} = \{x_2\}$. Vậy phương án tối ưu của bài toán gốc phi tuyến (3.38) là:

$$x_1 = A_1 = 112{,}25mm^2;\ x_2 = y_1 = 5mm;\ x_3 = A_2 = 96{,}63mm^2;\ x_4 = y_2 = 5mm.$$

Bảng 3.4

x_1	x_2	x_3	x_4		
8,66	391,64	0	-194,34	1953,5	y_1
0	-194,34	5	291,51	968,9	y_2
0	1	0	0	5	y_3
0	0	0	1	5	y_4
-1732	0	-1500	0	0	-Z'
y_1	x_2	x_3	x_4		
	45,2	0	-22,45	225,63	x_1
	-194,34	5	291,51	968,9	y_2
	1	0	0	5	y_3
	0	0	1	5	y_4
	78400	-1500	-38950	391500	-Z'
	x_2	y_2	x_4		
	45,2		-22,45	225,63	x_1
	-38,87		58,3	193,78	x_3
	1		0	5	y_3
	0		1	5	y_4
	200,95		48500	682170	-Z'
	y_3		x_4		
	-45,2		-22,45	0	x_1
	38,87		58,3	388,13	x_3
	1		0	5	x_2
	0		1	5	y_4
	-200,95		48500	581695	-Z'
	y_3		y_4		
			22,45	112,25	x_1
			-58,3	96,63	x_3
			0	5	x_2
			1	5	x_4
	-200,95		-48500	339195	-Z'

Thí dụ 3.2:

Đầu đề giống thí dụ (3.1) nhưng bổ sung thêm điều kiện ứng suất trong mỗi phần tử của giàn không được vượt quá 0,16kN/mm².

Giải

Ngoài các điều kiện ràng buộc (3.35), (3.37) đã nêu trong thí dụ (3.1), cần bổ sung thêm điều kiện ràng buộc về độ bền. Áp dụng hệ thức (3.24) ta có:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1732} & & \\ & \frac{E}{1000} & \\ & & \frac{E}{1000} \end{bmatrix}$$

Nhân bên phải ma trận T với ma trận A (xem thí dụ 3.1) ta được:

$$\mathbf{T.A} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2000} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2000} \\ \frac{E}{1000} & -\frac{E}{1000} \end{bmatrix}$$

Áp dụng bất đẳng thức (3.23), ta có:

$$\mathbf{T.A.X} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2000} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2000} \\ \frac{E}{1000} & -\frac{E}{1000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0{,}16 \\ 0{,}16 \\ 0{,}16 \end{bmatrix}$$

Sau khi khai triển bất phương trình trên đây, ta được 3 điều kiện ràng buộc về độ bền:

$$y_1 \le 1{,}545;\ y_2 \le 1{,}545;\ y_1 - y_2 \le 0{,}773.$$

Bổ sung các điều kiện trên vào bài toán (3.38), ta có bài toán tối ưu:

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -Z = -1732A_1 - 1500A_2 \qquad \text{(a)}$$

Với điều kiện:

$$\sqrt{3}\,A_1y_1 + 2A_2y_2 - 2A_2y_2 \qquad = 966 \qquad (b)$$

$$-2A_2y_1 + 3A_2y_2 \qquad = 483 \qquad (c)$$

$$y_1 \le 5 \quad y_2 \le 5 \qquad (d)$$

$$y_1 \le 1{,}545 \;\; y_2 \le 1{,}545 \;\; y_1 - y_2 \le 0{,}773 \qquad (e)$$

Đặt $A_1 = x_1$, $y_1 = x_2$, $A_2 = x_3$, $y_2 = x_4$ và chú ý điều kiện cuối cùng (e) có tính chất khống chế so với điều kiện (d), ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -Z = -1732x_1 - 1500x_3 \qquad (a)$$

Với điều kiện:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\,x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 = 966 && (b)\\
&-2x_2x_3 + 3x_3x_4 = 483 && (c)\\
&x_2 \le 1{,}545 && (d)\\
&x_4 \le 1{,}545 && (e)\\
&x_2 - x_4 \le 0{,}773 && (f)\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned} \qquad (3.41)$$

Để giải bằng phương pháp đơn hình, ta tiến hành tuyến tính hóa bằng chuỗi Taylor các hàm (3.41b), (3.41c).

Xuất phát từ điểm:

$$\{x_o\} = \{x_{10} \;\; x_{20} \;\; x_{30} \;\; x_{40}\} = \{300 \;\; 2 \;\; 250 \;\; 3\}.$$

Tính tương tự như trong thí dụ (3.1), ta có:

$$\begin{aligned}
g_1(x_o) &= \sqrt{3}.300.2 + 2.2.250 - 2.250.3 - 966 = -426\\
g_2(x_o) &= -2.2.250 + 3.250.3 - 483 = 767\\
\nabla g_1(x_o) &= [3{,}464 \quad 1019{,}6 \quad -2 \quad -500]\\
\nabla g_2(x_o) &= [0 \quad -500 \quad 5 \quad 750]
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức (1.68) (chương 1):

Hàm $g_1(x)$

$$-426 + [3{,}464 \quad 1019{,}6 \quad -2 \quad -500].\begin{pmatrix} x_1 - 300 \\ x_1 - 2 \\ x_3 - 250 \\ x_4 - 3 \end{pmatrix} = 0$$

Khai triển phương trình trên, ta được:

$$3{,}464x_1 + 1019{,}6x_2 - 2x_3 - 500x_4 = 1078{,}5 \qquad (3.42)$$

Hàm $g_2(x)$

$$767+\begin{bmatrix}0 & -500 & 5 & 750\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}x_1-300\\x_2-2\\x_3-250\\x_4-3\end{pmatrix}=0$$

Khai triển phương trình trên, ta được:

$$-500x_2 + 5x_3 + 750x_4 = 1753 \qquad (3.43)$$

Sau khi thay các phương trình đã được tuyến tính hóa (3.42), (3.43) vào các phương trình phi tuyến (3.41b), (3.41c) và đưa vào các biến giả tạo y_1, y_2, các biến đệm y_3, y_4, y_5, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -Z = -1732x_1 - 1500x_3$$

Với điều kiện:

$$\begin{aligned}
3{,}464x_1 + 1019{,}6x_2 - 2x_3 - 500x_4 + y_1 &= 1078{,}4\\
0.x_i - 500x_2 + 5x_3 + 750x_4 + y_2 &= 1733\\
x_2 + y_3 &= 1{,}545\\
x_4 + y_4 &= 1{,}545\\
x_2 - x_4 + y_5 &= 0{,}773\\
x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Các bảng đơn hình tương ứng trình bày trong bảng (3.5).

Bảng 3.5

x_1	x_2	x_3	x_4		
3,464	1019,6	-2	-500	1078,4	y_1
0	-500	5	750	1733	y_2
0	1	0	0	1,545	y_3
0	0	0	1	1,545	y_4
0	1	0	-1	0,773	y_5
-1732	0	-1500	0	0	-Z'
y_1	x_2	x_3	x_4		
	294,5	-0,577	-144,5	311,5	x_1
	-500	5	750	1733	y_2
	1	0	0	1,545	y_3
	0	0	1	1,545	y_4
	1	0	-1	0,773	y_5
	510000	-2500	-2500	539000	-Z'

Bảng 3.5 tiếp theo

	x_2	y_2	x_4		
	236,8		-5,8	511,5	x_1
	-100		150	346,5	x_3
	1		0	1,545	y_3
	0		1	1,545	y_4
	1		-1	0,773	y_5
	260000		125000	1405250	-Z'
	y_5		x_4		
	-236,8		178,8	328,5	x_1
	100		50	423,8	x_3
	-1		1	0,772	y_3
	0		1	1,545	y_4
	1		-1	0,773	x_2
	-260000		385000	1204250	-Z'
	y_5		y_3		
	-58		-178,8	190,5	x_1
	150		-50	385,2	x_3
	-1		1	0,772	x_4
	1		-1	0,773	y_4
	0		1	1,545	x_2
	-125000		-385000	906750	-Z'
	y_4		y_3		
	58			235,2	x_1
	-150			269,2	x_3
	1			1,545	x_4
	1			0,773	y_5
	0			1,545	x_2
	-125000		-26000	810250	-Z'

Bảng đơn hình cuối cùng cho phương án tối ưu thứ nhất:

$$\{x_1\} = \{x_{11}\ \ x_{21}\ \ x_{31}\ \ x_{41}\} = \{235{,}2\ \ \ 1{,}545\ \ \ 269{,}2\ \ \ 1{,}545\}$$

Tiếp tục thay $\{x_2\}$ vào $\{x_1\}$, $\{x_1\}$ vào $\{x_o\}$ và tiến hành tính toán như đã trình bày trong phần trước. Sau khi chỉnh lí kết quả tính toán, ta có bài toán quy hoạch tuyến tính thứ 2:

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -1732x_1 - 1500x_2$$

Với điều kiện:

$$\begin{aligned}
2,66x_1 + 945,4x_2 + 0.x_3 - 538,4x_4 + y_1 &= 1596 \\
0.x_1 - 538,4x_2 + 1,545x_3 + 807,6x_4 + y_2 &= 896 \\
x_2 + y_3 &= 1,545 \\
x_4 + y_4 &= 1,545 \\
x_2 - x_4 + y_5 &= 0,773 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Các bảng đơn hình tương ứng trình bày trong bảng (3.6)

Bảng 3.6

x_1	x_2	x_3	x_4		
2,66	945,4	0	-538,4	1596	y_1
0	-538,4	1,545	807,6	896	y_2
0	1	0	0	1,545	y_3
0	0	0	1	1,545	y_4
0	1	0	-1	0,773	y_5
-1732	0	-1500	0	0	-Z'
y_1	x_2	x_3	x_4		
	355,5	0	-202,5	600	x_1
	-538,4	1,545	807,6	896	y_2
	1	0	0	1,545	y_3
	0	0	1	1,545	y_4
	1	0	-1	0,773	y_5
	616000	-1500	-356000	1039200	-Z'
	x_2	y_2	x_4		
	355,5		-202,5	600	x_1
	-348		522	580	x_3
	1		0	1,545	y_3
	0		1	1,545	y_4
	1		-1	0,773	y_5
	94500		426000	1909200	-Z'

Bảng 3.6 tiếp theo

	y_5		x_4		
	-355,5		153	325	x_1
	348		174	849	x_3
	-1		1	0,772	y_3
	0		1	1,545	y_4
	1		-1	0,773	x_2
	-94500		520500	1836200	-Z'
	y_5		y_3		
	-202,5		-153	206,8	x_1
	522		-174	714,6	x_3
	-1		1	0,772	x_4
	1		-1	0,773	y_4
	0		1	1,545	x_2
	426000		-520500	1433700	-Z'
	y_4		y_3		
	202,5			363,1	x_1
	-522			311,1	x_3
	1			1,545	x_4
	1			0,073	y_5
	0			1,545	x_2
	-426000			1103700	-Z'

Bảng đơn hình cuối cùng cho phương án tối ưu thứ 2:

$$x_1 = A_1 = 363,1\text{mm}^2;\ x_2 = y_1 = 1,545\text{mm};$$

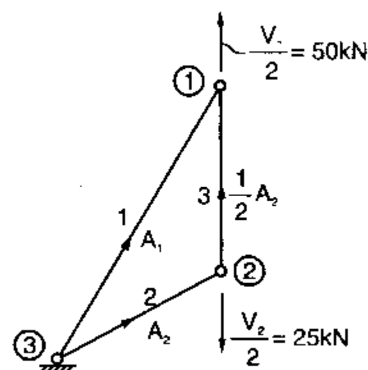
$$x_3 = A_2 = 311,1\text{mm}^2;\ x_4 = y_2 = 1,545.$$

Nếu tiếp tục thay $\{x_3\}$ vào $\{x_2\}$, $\{x_2\}$ vào $\{x_1\}$, ta vẫn có $\{x_3\} = \{x_2\}$. Điều này chứng tỏ phương án tối ưu thứ 2 là phương án tối ưu của bài toán gốc phi tuyến (3.41).

Thí dụ 3.3:

Đầu đề giống như thí dụ (3.1). Chỉ khác là tải trọng V_2 hướng xuống dưới (hình 3.4).

Trong trường hợp này, ta chưa rõ hướng của thành phần chuyển vị trên phương thẳng đứng tại nút 1 và nút 2.



Hình 3.4

Nói cách khác, ta chưa rõ dấu của chuyển vị y_1 và y_2. Ta sẽ xử lí trường hợp này như đã trình bày trong §1.3.

Áp dụng hệ thức (3.30) và chú ý rằng $e_R = \Delta_R$, ta có:

$$y_1 = x_2 = \gamma_2 - \Delta_2 = \gamma_2 - 5$$
$$y_2 = x_4 = \gamma_4 - \Delta_4 = \gamma_4 - 5$$

Áp dụng bất đẳng thức (3.31), ta có:

$$0 \le \gamma_2 \le 2\Delta_2 = 10$$
$$0 \le \gamma_4 \le 2\Delta_4 = 10$$

Trong đó γ_2 và γ_4 là các biến mới không âm. Sau khi thay x_2, x_4 bằng các hệ thức trên đây vào các phương trình (3.38b), (3.38c) và chú ý đổi dấu vế trái của phương trình (3.38c) (vì tải trọng V_2 hướng xuống dưới), ta đưa bài toán phi tuyến (3.38) về dạng sau đây (xem thí dụ 3.1).

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -1732x_1 - 1500x_3$$

Với điều kiện:

$$\begin{aligned} & -5\sqrt{3}\,x_1 + \sqrt{3}\,x_1\gamma_2 + 2\gamma_2 x_3 - 2x_3\gamma_4 = 966 \\ & 2\gamma_2 x_3 + 5x_3 - 3x_3\gamma_4 = 483 \\ & \gamma_2 \le 10 \quad \gamma_4 \le 10 \\ & x_1, \gamma_2, x_3, \gamma_4 \ge 0 \end{aligned} \qquad (3.44)$$

Đề nghị độc giả tự giải lấy bài toán trên.

Thí dụ 3.4:

Đầu đề giống thí dụ (3.1). Chỉ khác là tải trọng V_2 hướng xuống dưới (hình 3.4), ứng suất nén cho phép bằng 0,144kN/mm², ứng suất kéo cho phép bằng 0,16kN/mm².

Trong trường hợp này, ta chưa rõ dấu của các thành phần chuyển vị y_1, y_2 và dấu của ứng suất trong các phần tử của giàn.

Giống như trong thí dụ (3.3), ta thay y_1 và y_2 bằng các hệ thức:

$$\begin{aligned} & y_1 = x_2 = \gamma_2 - 5 \\ & y_2 = x_4 = \gamma_4 - 5 \\ \text{Trong đó} \quad & 0 \le \gamma_2 \le 10 \quad (a) \\ & 0 \le \gamma_4 \le 10 \quad (b) \end{aligned} \qquad (3.45)$$

Sau khi áp dụng hệ thức (3.33), lợi dụng các kết quả tính toán trong thí dụ (3.2) và thay y_1, y_2 bằng các hệ thức trên, ta có:

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{2000} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2000} \\ \frac{E}{1000} & -\frac{E}{1000} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_2 - 5 \\ \gamma_4 - 5 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0{,}16 \\ 0{,}16 \\ 0{,}16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{2000} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2000} \\ \frac{E}{1000} & -\frac{E}{1000} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \gamma_2 - 5 \\ \gamma_4 - 5 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0,14 \\ 0,14 \\ 0,14 \end{bmatrix}$$

Từ 2 bất đẳng thức ma trận trên, ta suy ra:

$$\gamma_2 \le 6{,}545 \qquad \gamma_2 \ge 3{,}608 \qquad \text{(a)}$$

$$\gamma_4 \le 6{,}545 \qquad \gamma_4 \ge 3{,}608 \qquad \text{(b)} \qquad (3.46)$$

$$\gamma_2 - \gamma_4 \le 0{,}773 \qquad \gamma_4 - \gamma_2 \le 0{,}691 \qquad \text{(c)}$$

So sánh 2 hệ bất đẳng thức (3.45), (3.46) ta thấy hệ bất đẳng thức (3.46) có tính chất khống chế. Lợi dụng các kết quả tính toán trong bài toán (3.44), ta có bài toán quy hoạch phi tuyến:

Cực đại hóa hàm

$$Z' = -1732x_1 - 1500x_3$$

Với điều kiện:

$$-5\sqrt{3}\,x_1 + \sqrt{3}\,x_1\gamma_2 + 2\gamma_2 x_3 - 2x_3\gamma_4 = 966$$

$$2\gamma_2 x_3 + 5x_3 - 3x_3\gamma_4 = 483$$

$$\gamma_2 \le 6{,}545 \qquad \gamma_2 \ge 3{,}608$$

$$\gamma_4 \le 6{,}545 \qquad \gamma_4 \ge 3{,}608$$

$$\gamma_2 - \gamma_4 \le 0{,}773 \qquad \gamma_4 - \gamma_2 \le 0{,}691$$

$$x_1, \gamma_2, x_3, \gamma_4 \ge 0$$

Đề nghị độc giả tự giải lấy bài toán trên.

§2. BÀI TOÁN TỐI ƯU ÁP DỤNG CHO HỆ KHUNG

Khung khác với giàn ở một số điểm như đã trình bày trong §6.1 chương hai.

Phần sau sẽ giới thiệu dạng ma trận khi tính khung theo phương pháp chuyển vị.

§2.1. Ma trận độ cứng

Trong cơ học kết cấu, ta đã làm quen với các hệ thức sau:

$$N_i = \frac{E_i A_i}{L_i} u_i$$

$$M_{1i} = -\frac{6E_i I_i}{L_i^2}.v_i + \frac{4E_i I_i}{L_i}.\theta_{1i} + \frac{2E_i I_i}{L_i}.\theta_{2i}$$

$$M_{2i} = -\frac{6E_i I_i}{L_i^2}.v_i + \frac{2E_i I_i}{L_i}.\theta_{1i} + \frac{4E_i I_i}{L_i}.\theta_{2i}$$

$$Q_i = \frac{12E_iI_i}{L_i^3}.v_i - \frac{6E_iI_i}{L_i^2}.\theta_{1i} - \frac{6E_iI_i}{L_i^2}.\theta_{2i}$$

Trong đó:

N_i- lực dọc trong phần tử i;

Q_i- lực cắt trong phần tử i;

M_{1i}- mômen tại đầu 1 của phần tử i;

M_{2i}- mômen tại đầu 2 của phần tử i;

u_i- biến dạng dọc trục của phần tử i;

v_i- chuyển vị thẳng tương đối giữa 2 đầu của phần tử i (vuông góc với trục của phần tử);

θ_{1i}- góc xoay tại đầu 1 của phần tử i;

θ_{2i}- góc xoay tại đầu 2 của phần tử i.

Ta quy ước dấu của nội lực như sau. Lực dọc kéo là dương, nén là âm. Mô men uốn là dương khi quay ngược chiều kim đồng hồ. Lực cắt là dương khi làm cho phần tử quay ngược chiều kim đồng hồ. Góc xoay là dương khi quay ngược chiều kim đồng hồ. Trong trường hợp ngược lại, các đại lượng nói trên quy ước là âm.

Các hệ thức trên có thể biểu thị dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{k}_i.\mathbf{U} \qquad (3.47)$$

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_{1i} \\ M_{2i} \end{bmatrix} \qquad (3.48)$$

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_i & d_i & d_i \\ 0 & d_i & e_i & f_i \\ 0 & d_i & f_i & e_i \end{bmatrix} \qquad (3.50)$$

$$a_i = E_iA_i/L_i;\ b_i = 12E_iI_i/L_i^3;\ d_i = -6E_iI_i/L_i^2;\ e_i = 4E_iI_i/L_i;\ f_i = 2E_iI_i/L_i \qquad (3.51)$$

Ta gọi:

$\mathbf{S}_i$- vectơ nội lực của phần tử i,

$\mathbf{U}_i$- vectơ chuyển vị của phần tử i;

$\mathbf{k}_i$- ma trận độ cứng của phần tử i.

Giả sử khung có n phần tử. Đối với toàn bộ khung, hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực **S** và vectơ chuyển vị **U** như sau:

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}.\ \mathbf{U} \tag{3.52}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_n \end{bmatrix} \quad (3.53)\ ; \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & \\ & k_2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & k_i & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & k_n \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

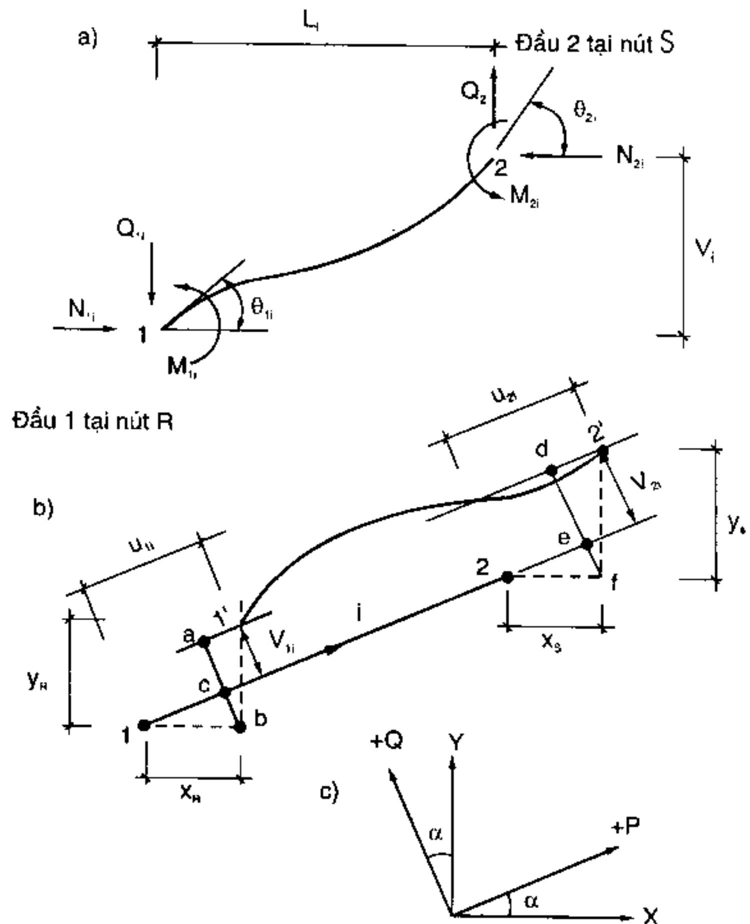
§2.2. Ma trận biến đổi chuyển vị

Giả sử một phần tử bất kì i của khung có đầu 1 quy tụ vào nút R và đầu 2 quy tụ vào nút S (hình 3.5a). Hệ tọa độ riêng của nó là P và Q. Trục P trùng với trục của phần tử i và có chiều dương hướng từ đầu 1 đến đầu 2. Trục Q vuông góc với trục P và có chiều dương biểu thị như trên hình (3.5c). Toàn bộ khung có hệ trục tọa độ chung X, Y như trên hình (3.5c).

Giả sử do một nguyên nhân bên ngoài nào đó, các nút R và S có các chuyển vị tương ứng là $\{x_R\ y_R\ \theta_R\}$ và $\{x_S\ y_S\ \theta_S\}$ (hình 3.5b). Đầu 1 của phần tử i di động đến điểm 1', đầu 2 di động đến điểm 2' (hình 3.5b). Các thành phần chuyển vị tương ứng với đầu 1 và đầu 2 là $\{u_{1i}\ v_{1i}\ \theta_{1i}\}$ và $\{u_{2i}\ v_{2i}\ \theta_{2i}\}$. Từ các quan hệ hình học, ta suy ra các hệ thức sau đây:

$$u_{1i} = x_R\cos\alpha_i + y_R\sin\alpha_i$$

$$u_{2i} = x_S\cos\alpha_i + y_S\sin\alpha_i$$



Hình 3.5

Vậy biến dạng dọc trục của phần tử i là:

$$u_i = u_{2i} - u_{1i} = -x_R\cos\alpha_i - y_R\sin\alpha_i + x_S\cos\alpha_i + y_S\sin\alpha_i$$

Chuyển vị vuông góc với phần tử là:

$$v_{1i} = y_R\cos\alpha_i - x_R\sin\alpha_i$$

$$v_{2i} = y_S\cos\alpha_i - x_S\sin\alpha_i$$

Chuyển vị thẳng tương đối của phần tử i là:

$$v_i = v_{2i} - v_{1i} = x_R\sin\alpha_i - y_R\cos\alpha_i - x_S\sin\alpha_i + y_S\cos\alpha_i$$

Các góc xoay của phần tử i là:

$$\theta_{1i} = \theta_R;\ \theta_{2i} = \theta_S$$

Căn cứ vào các hệ thức trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{bmatrix}}_{U_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ \sin\alpha_i & -\cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\text{tại nút R}} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{tại nút S}} \end{bmatrix}}_{A_i} . \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta_R \\ \dots \\ x_S \\ y_S \\ \theta_S \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ y \\ \theta \end{matrix}}\right\} \text{Tại nút R} \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ y \\ \theta \end{matrix}}\right\} \text{Tại nút R} \end{matrix}$$

Hệ thức ma trận trên có thể viết dưới dạng rút gọn:

$$\mathbf{U_i = A_i \,.\, \{X_R \dots X_S\}} \qquad (3.56)$$

Trong đó:

$\mathbf{X_R}$- vectơ chuyển vị tại nút R;

$\mathbf{X_S}$- vectơ chuyển vị tại nút S.

$\mathbf{A_i}$- ma trận biến đổi chuyển vị của phần tử i. Ma trận $\mathbf{A_i}$ có dạng:

$$\mathbf{A_i} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ \sin\alpha_i & -\cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\text{tại nút R}} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{tại nút S}} \end{bmatrix} \qquad (3.57)$$

Nếu khung có n phần tử và m nút, hệ thức ma trận giữa vectơ chuyển vị của các phần tử **U** và vectơ chuyển vị nút **X** sẽ là:

$$\mathbf{U = A.\, X} \qquad (3.58)$$

Trong đó:

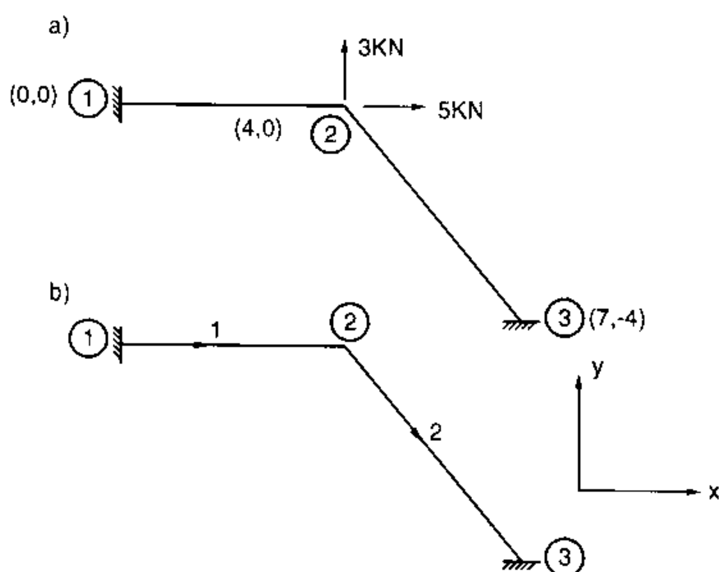
$\mathbf{U} = \{U_1\ U_2 \dots U_i \dots U_n\}$

$\mathbf{X} = \{X_1\ X_2 \dots X_i \dots X_m\}$

A- ma trận biến đổi chuyển vị của toàn bộ khung. **A** là ma trận kết hợp các ma trận con dạng (3.57).

Thí dụ: Lập ma trận biến đổi chuyển vị cho kết cấu trên hình (3.6)

Khung có 2 phần tử và 3 nút. Ta xem mỗi phần tử của khung có phần đóng góp riêng vào ma trận A như sau.



Hình 3.6

Phần tử 1:

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút R=1 (không có chuyển vị) và đầu 2 quy tụ vào nút S=2 (các thành phần chuyển vị là $\{x_2\ y_2\ \theta_2\}$). Áp dụng các hệ thức (3.56), (3.57), ta có:

Tại nút S = 2

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Thay $\cos\alpha_1 = 1$, $\sin\alpha_1 = 0$, ta có:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị là $\{x_2\ y_2\ \theta_2\}$) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 3 (không có chuyển vị). Áp dụng các hệ thức (3.56), (3.57), ta có:

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & 0 \\ \sin\alpha_2 & -\cos\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

tại nút R = 2

Thay $\cos\alpha_2 = 0{,}6$; $\sin\alpha_2 = -0{,}8$, ta có:

$$U_2 = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ thức ma trận giữa vectơ chuyển vị của các phần tử U và vectơ chuyển vị nút X đối với toàn bộ khung có dạng:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ma trận biến đổi chuyển vị của khung là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§2.3. Ma trận độ cứng tổng thể

Áp dụng công thức (3.52) và (3.58), ta có hệ thức ma trận:

$$\mathbf{S = k.\ U = [k.A].\ X} \qquad 3.59)$$

Ta lập ma trận **[k.A]** bằng cách xem nó là ma trận kết hợp các phần đóng góp của các phần tử. Nhân bên phải ma trận k_i (hệ thức 3.50) với ma trận $\mathbf{A_i}$ (hệ thức 3.57), ta được phần đóng góp của phần tử i vào ma trận **[k. A]** như sau:

$$[\mathbf{kA}]_i = \begin{bmatrix} -a_i\cos\alpha_i & -a_i\sin\alpha_i & 0 & \dots & a_i\cos\alpha_i & a_i\sin\alpha_i & 0 \\ b_i\sin\alpha_i & -b_i\cos\alpha_i & d_i & \dots & -b_i\sin\alpha_i & b_i\cos\alpha_i & d_i \\ d_i\sin\alpha_i & -d_i\cos\alpha_i & e_i & \dots & -d_i\sin\alpha_i & d_i\cos\alpha_i & f_i \\ d_i\sin\alpha_i & -d_i\cos\alpha_i & f_i & \dots & -d_i\sin\alpha_i & d_i\cos\alpha_i & e_i \end{bmatrix} \qquad (3.60)$$

(cột 1–3: tại nút R; cột 4–6 sau dấu ...: tại nút S)

[k.A] là ma trận kết hợp các ma trận con có dạng (3.60).

Áp dụng nguyên lí cân bằng giữa công của ngoại lực và thế năng biến dạng đàn hồi, ta có:

$$1/2\mathbf{P'}.\ \mathbf{X} = 1/2\ \mathbf{S'}.\ \mathbf{U}$$

Thay **U** từ hệ thức (3.58) và **S** từ hệ thức (3.52) vào phương trình trên, ta có:

$$\mathbf{P'}.\ \mathbf{X} = [\mathbf{k}.\ \mathbf{A}.\ \mathbf{X}]'.\ \mathbf{A}.\ \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{P'} = \mathbf{X'}.\ \mathbf{A'}.\ \mathbf{k'}.\ \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{P} = [\mathbf{A'}.\ \mathbf{k}.\ \mathbf{A}].\ \mathbf{X}$$

Đặt $\mathbf{K} = \mathbf{A'}.\ \mathbf{k}.\ \mathbf{A}$ (3.61)

$\Rightarrow$ $\mathbf{P} = \mathbf{K}.\ \mathbf{X}$ (3.62)

Ta gọi **K** là *ma trận cứng tổng thể*

Ta có thể lập ma trận **K** bằng 2 cách:

1) Thực hiện các phép nhân ma trận theo trình tự nêu trong công thức (3.61).

2) Xem **K** là ma trận kết hợp các phần đóng góp của các phần tử. Sau khi nhân bên phải ma trận **A'** với ma trận **[kA]**, ta thấy phần đóng góp của phần tử i vào ma trận **K** như sau:

$$\mathbf{K}_i = \begin{array}{l} \text{tại nút R} \\ \\ \\ \\ \text{tại nút S} \end{array} \begin{bmatrix} A_i & B_i & -C_i & \dots & -A_i & -B_i & -C_i \\ B_i & F_i & -T_i & \dots & -B_i & -F_i & -T_i \\ -C_i & -T_i & e_i & \dots & C_i & T_i & f_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_i & -B_i & C_i & \dots & A_i & B_i & C_i \\ -B_i & -F_i & T_i & \dots & B_i & F_i & T_i \\ -C_i & -T_i & f_i & \dots & C_i & T_i & e_i \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{tại nút R}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{tại nút S}}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} A_i &= a_i \cos^2 \alpha_i + b_i \sin^2 \alpha_i \\ B_i &= (a_i - b_i)\cos\alpha_i \sin\alpha_i \\ C_i &= -d_i \sin\alpha_i \\ F_i &= a_i \sin^2 \alpha_i + b_i \cos^2 \alpha_i \\ T_i &= d_i \cos\alpha_i \end{aligned} \tag{3.64}$$

a_i, b_i, d_i, e_i, f_i tính theo công thức (3.51)

Ma trận (3.63) có thể viết dưới dạng rút gọn:

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RS} \\ \mathbf{K}_{SR} & \mathbf{K}_{SS} \end{bmatrix} \tag{3.63a}$$

Thí dụ:

Lập phương trình **P = K. X** cho kết cấu trên hình (3.6a).

Trước hết, ta lập ma trận độ cứng tổng thể **K** theo cách thứ 2 đã được trình bày trong phần trên.

Phần tử 1:

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 1 (không có chuyển vị) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 2 (các thành phần chuyển vị là x_2, y_2, θ_2). Vì nút R = 1 là gối tựa ngàm nên các ma trận con $\mathbf{K}_{RR}$, $\mathbf{K}_{RS}$, $\mathbf{K}_{SR}$ không tồn tại. Chỉ còn lại ma trận con $\mathbf{K}_{SS} = \mathbf{K}_{22}$. Từ hệ thức (3.63) và (3.63a), ta có:

$$\mathbf{K}_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ B_1 & F_1 & T_1 \\ C_1 & T_1 & e_2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị là x_2, y_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 3 (chuyển vị bằng không). Vì nút S = 3 là gối tựa ngàm nên các ma trận con $\mathbf{K}_{RS}$, $\mathbf{K}_{SR}$, $\mathbf{K}_{SS}$ không tồn tại. Chỉ còn ma trận con $\mathbf{K}_{RR} = \mathbf{K}_{22}$. Từ hệ thức (3.63) và (3.63a), ta có:

$$\mathbf{K}_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & -C_2 \\ B_2 & F_2 & -T_2 \\ -C_2 & -T_2 & e_2 \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng tổng thể K là ma trận kết hợp các phần đóng góp của các phần tử 1 và 2. Do đó:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & C_1 - C_2 \\ B_1 + B_2 & F_1 + F_2 & T_1 - T_2 \\ C_1 - C_2 & T_1 - T_2 & e_1 + e_2 \end{bmatrix}$$

Từ hình (3.6a), ta có vectơ tải trọng **P** và vectơ chuyển vị nút **X** như sau:

$$\mathbf{P} = \{ P_{2x}, P_{2y}, P_{2\theta} \} = \{5 \quad 3 \quad 0\}; \mathbf{X} = \{ x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \}$$

Áp dụng công thức (3.62), ta có phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & C_1 - C_2 \\ B_1 + B_2 & F_1 + F_2 & T_1 - T_2 \\ C_1 - C_2 & T_1 - T_2 & e_1 + e_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

§2.4. Bài toán tối ưu tính khung theo phương pháp chuyển vị

Ta sẽ thành lập hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc như sau:

1) Hàm mục tiêu.

Hàm mục tiêu có thể biểu thị bằng các phương trình (2.17) hoặc (2.19c) (xem chương hai).

2) Điều kiện ràng buộc về độ bền.

Khi không xét đến ảnh hưởng của lực dọc, ứng suất pháp trong phần tử i phải thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\frac{M_{1i}}{W_i} \le \sigma_i^* \quad \frac{M_{2i}}{W_i} \le \sigma_i^* \tag{3.65}$$

Trong đó:

M_{1i}, M_{2i}- mômen tại đầu 1 và mômen tại đầu 2 của phần tử i;

W_i- mômen chống uốn của phần tử i;

σ_i^* - ứng suất cho phép của phần tử i.

Căn cứ vào các hệ thức (3.47), (3.48), (3.49), (3.50), hệ bất đẳng thức (3.65) có thể viết:

$$\begin{aligned} &\text{Tại đầu 1: } (d_i . v_i + e_i . \theta_{1i} + f_i . \theta_{2i})/W_i \le \sigma_i^* \\ &\text{Tại đầu 2: } (d_i . v_i + f_i . \theta_{1i} + e_i . \theta_{2i})/W_i \le \sigma_i^* \end{aligned} \tag{3.66}$$

Khi xét đến ảnh hưởng của lực dọc, các điều kiện trên đây có thể viết:

$$\frac{N_i}{A_i} + \frac{M_{1i}}{W_i} \le \sigma_i^* \; ; \qquad \frac{N_i}{A_i} + \frac{M_{2i}}{W_i} \le \sigma_i^* \tag{3.67}$$

hoặc

$$\begin{aligned} &\text{Tại đầu 1: } u_i . E_i / L_i + (d_i . v_i + e_i . \theta_{1i} + f_i . \theta_{2i})/W_i \le \sigma_i^* \\ &\text{Tại đầu 2: } u_i . E_i / L_i + (d_i . v_i + f_i . \theta_{1i} + e_i . \theta_{2i})/W_i \le \sigma_i^* \end{aligned} \tag{3.68}$$

Trong đó:

d_i, f_i, e_i tính theo công thức (3.51).

3) Điều kiện ràng buộc về độ cứng:

Để đảm bảo yêu cầu về độ cứng, bất đẳng thức sau đây phải được thỏa mãn:

$$\mathbf{X} \le \Delta \tag{3.69}$$

Trong đó:

X- vectơ chuyển vị nút;

Δ- vectơ chuyển vị cho phép.

4) Điều kiện ràng buộc về cân bằng:

Áp dụng công thức (3.62), ta có điều kiện ràng buộc về cân bằng:

$$\mathbf{P = K . X}$$

Tóm lại, bài toán tối ưu tính khung theo phương pháp chuyển vị có dạng tổng quát sau đây:

Cực tiểu hóa hàm

$$C = \sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g L_g A_g \qquad \text{hoặc hàm:}$$

$$C = 0{,}559 \sum_{g=1}^{G} C_g \gamma_g L_g I_g^{1/2}$$

Với điều kiện:

$$u_i . E_i / L_i + (d_i . v_i + e_i . \theta_{1i} + f_i . \theta_{2i})/W_i \le \sigma_i^*$$
$$u_i . E_i / L_i + (d_i . v_i + f_i . \theta_{1i} + e_i . \theta_{2i})/W_i \le \sigma_i^*$$
$$i = 1, 2, ... s$$
$$\mathbf{X} \le \mathbf{D}$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{K} . \mathbf{X}$$

§2.5. Xử lí trường hợp biến âm

Khi tính khung, có khả năng xuất hiện các trường hợp sau:

1) Chưa rõ dấu của chuyển vị.

2) Chưa rõ dấu của ứng suất.

Trong trường hợp chuyển vị thẳng, có thể xử lí như đã trình bày trong §1.3.

Đối với chuyển vị xoay θ, ta đưa vào biến mới không âm λ sao cho:

$$\theta = \lambda - e \qquad (3.70)$$

Trong đó:

e - biểu thị giá trị góc xoay cho phép. Để đảm bảo yêu cầu về độ cứng, cần thỏa mãn điều kiện:

$$|\theta| \le e \text{ hay } -e \le \theta \le e$$

Thay θ bằng hệ thức (3.70), ta có:

$$0 \le \lambda \le 2e \qquad (3.71)$$

Nếu dấu của θ khẳng định là âm, phải thỏa mãn điều kiện;

$$-e \le \theta \le 0$$

Thay θ bằng hệ thức (3.70), ta có:

$$0 \le \lambda \le e \qquad (3.72)$$

Có thể chọn e = 0,08 radian. Giá trị góc xoay cho phép này bảo đảm cho khung làm việc an toàn trong giai đoạn đàn hồi.

Khi chưa rõ dấu ứng suất pháp, ta xử lí như sau:

Ta biết rằng dấu của ứng suất pháp phụ thuộc vào dấu của lực dọc và dấu của mômen. Hơn nữa, ứng suất pháp ở 2 thớ biên của tiết diện do mômen gây ra lại ngược dấu nhau.

Vì vậy, đối với tiết diện có 2 trục đối xứng, ta tổ hợp ứng suất pháp do lực dọc gây ra và ứng suất pháp do mômen gây ra theo 4 điều kiện độc lập như sau:

$$\begin{aligned} N/A + M/W &\le \sigma_k^* \\ N/A - M/W &\le \sigma_k^* \\ -N/A + M/W &\le \sigma_n^* \\ -N/A - M/W &\le \sigma_n^* \end{aligned} \qquad (3.73)$$

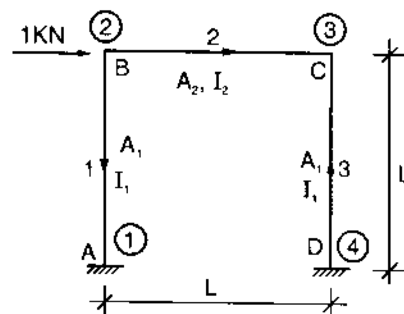
Trong đó:

σ_k^* - ứng suất kéo cho phép.

σ_n^* - ứng suất nén cho phép.

§2.6. Thí dụ tính toán

***Thí dụ 3.5*:**



Hình 3.7

Cho một khung với tải trọng, đặc trưng hình học biểu thị như trên hình 3.7. Ứng suất pháp cho phép bằng 0,15kN/mm² (bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc). Chuyển vị thẳng cho phép trên phương nằm ngang tại nút 2 bằng 4mm. Các cột thuộc nhóm diện tích A_1, xà thuộc nhóm diện tích A_2. L = 1000mm; E = 207kN/mm².

Giải

Trước hết, ta nhận thấy khung có tính chất đối xứng, tải trọng có tính chất phản đối xứng nên các thành phần chuyển vị tại các nút 2 và 3 bằng nhau:

$$x_2 = x_3;\ y_2 = y_3;\ \theta_2 = \theta_3$$

Để thành lập các điều kiện ràng buộc về độ bền và cân bằng, trước hết ta hãy thành lập ma trận **[k. A]** và ma trận độ cứng tổng thể **K**.

1) Thành lập ma trận **[k. A]**.

Lần lượt áp dụng công thức (3.60) cho các phần tử như sau:

Phần tử 1 (hình 3.7):

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị là x_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S =1 (gối tựa ngàm). Do đó, phần đóng góp của phần tử 1 vào ma trận **[k.A]** như sau:

$$[\mathbf{k.A}]_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1\cos\alpha_1 & 0 \\ b_1\sin\alpha_1 & d_1 \\ d_1\sin\alpha_1 & e_1 \\ d_1\sin\alpha_1 & f_1 \\ (x_2) & (\theta_2) \end{bmatrix}}_{\text{tại nút 2}}$$

Phần tử 2: Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị là x_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 3 (các thành phần chuyển vị là $x_3 = x_2$, $\theta_3 = \theta_2$). Do đó:

$$[\mathrm{k.A}]_2 = \begin{bmatrix} -a_2\cos\alpha_2 & 0 & \dots & a_2\cos\alpha_2 & 0 \\ b_2\sin\alpha_2 & d_2 & \dots & -b_2\sin\alpha_2 & d_2 \\ d_2\sin\alpha_2 & e_2 & \dots & -d_2\sin\alpha_2 & f_2 \\ d_2\sin\alpha_2 & f_2 & \dots & -d_2\sin\alpha_2 & e_2 \\ \underbrace{(x_2) \quad\quad (\theta_2)}_{\text{tại nút 2}} & & \dots & \underbrace{(x_2) \quad\quad (\theta_2)}_{\text{tại nút 3}} & \end{bmatrix}$$

Ma trận trên có thể viết:

$$[\mathbf{k}.\mathbf{A}]_2 = \begin{bmatrix} (-a_2\cos\alpha_2 + a_2\cos\alpha_2) & \dots & 0+0 \\ (b_2\sin\alpha_2 - b_2\sin\alpha_2) & \dots & d_2 + d_2 \\ (d_2\sin\alpha_2 - d_2\sin\alpha_2 & \dots & e_2 + f_2 \\ (d_2\sin\alpha_2 - d_2\sin\alpha_2) & \dots & f_2 + e_2 \\ (x_2) & \dots & (\theta_2) \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{k}.\mathbf{A}]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2d_2 \\ 0 & e_2 + f_2 \\ 0 & f_2 + e_2 \\ (x_2) & (\theta_2) \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

Phân tích tương tự như trên, ta có:

$$[\mathbf{k}.\mathbf{A}]_3 = \begin{bmatrix} a_3\cos\alpha_3 & 0 \\ -b_3\sin\alpha_3 & d_3 \\ -d_3\sin\alpha_3 & f_3 \\ -d_3\sin\alpha_3 & e_3 \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào công thức (3.59) và các kết quả vừa tính trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ M_{12} \\ M_{22} \\ M_{13} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\sin\alpha_1 & e_1 \\ d_1\sin\alpha_1 & f_1 \\ 0 & e_2 + f_2 \\ 0 & e_2 + f_2 \\ -d_3\sin\alpha_3 & f_3 \\ -d_3\sin\alpha_3 & e_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Thay $\sin\alpha_1 = -1$, $\sin\alpha_3 = 1$, ta được:

$$M_{11} = -d_1x_2 + e_1\theta_2$$

$$M_{21} = -d_1x_2 + f_1\theta_2$$

$$M_{12} = M_{22} = (e_2 + f_2).\ \theta_2$$

$$M_{22} = (e_2 + f_2)\ \theta_2$$

$$M_{13} = -d_3.x_2 + f_3.\ \theta_2$$

$$M_{23} = -d_3x_2 + e_3\theta_2$$

Từ công thức (3.51) ta có:

$d_1 = d_3 = -6EI_1/L^2$; $f_1 = f_3 = 2EI_1/L$; $e_1 = e_3 = 4EI_1/L$; $e_2 = 4EI_2/L$; $f_2 = 2EI_2/L$

do đó $M_{11} = M_{23}$, $M_{21} = M_{13}$.

Mặt khác, do tính chất biến dạng của khung (hình 3.7) ta thấy $x_2 > 0$, $\theta_2 < 0$. Đồng thời $e_1 > f_1 > 0$ do đó $M_{21} > M_{11}$.

2) Thành lập ma trận độ cứng tổng thể **K**.

Trước hết, ta thành lập ma trận biến đổi chuyển vị **A** và lần lượt áp dụng công thức (3.57) cho các phần tử như sau:

Phần tử 1:

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (thành phần chuyển vị là x_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 1 (gối tựa ngàm). Do đó, phần đóng góp của phần tử 1 vào ma trận **A** như sau:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_1 & 0 \\ \sin\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_1) \\ (v_1) \\ (\theta_{11}) \\ (\theta_{21}) \end{matrix}$$
$$\qquad (x_2) \quad (\theta_2)$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 2 (các thành phần chuyển vị là x_2, θ_2) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 3 (thành phần chuyển vị là $x_3 = x_2$, $\theta_3 = \theta_2$).

Do đó:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_2 & 0 & \ldots & \cos\alpha_2 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \ldots & -\sin\alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\underbrace{(x_2) \quad (\theta_2)}_{\text{tại nút 2}} \qquad \underbrace{(x_2) \quad (\theta_2)}_{\text{tại nút 3}}$$

hay

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} (-\cos\alpha_2 + \cos\alpha_2) & 0+0 \\ (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_2) & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_2) \\ (v_2) \\ (\theta_{12}) \\ (\theta_{22}) \end{matrix}$$
$$\qquad (x_2) \qquad\qquad (\theta_2)$$

Phần tử 3:

Phân tích tương tự như trên, ta có:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_3) \\ (v_3) \\ (\theta_{13}) \\ (\theta_{23}) \end{matrix}$$

Trong các ma trận trên, ta thay $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_3 = 0$, $\sin\alpha_1 = -\sin\alpha_3 = -1$; $\cos\alpha_2 = 1$, $\sin\alpha_2 = 0$.

Kết hợp các ma trận trên và bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc u_i, ta có ma trận biến đổi chuyển vị:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Áp dụng các hệ thức ma trận (3.50), (3.55) và bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, ta có ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} b_1 & d_1 & d_1 & & & & & & \\ d_1 & e_1 & f_1 & & & & & & \\ d_1 & f_1 & e_1 & b_2 & d_2 & d_2 & & & \\ & & & d_2 & e_2 & f_2 & & & \\ & & & d_2 & f_2 & e_2 & & & \\ & & & & & & b_3 & d_3 & d_3 \\ & & & & & & d_3 & e_3 & f_3 \\ & & & & & & d_3 & f_3 & e_3 \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A'}.\mathbf{k}.\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2b_1 & -2d_1 \\ -2d_1 & 2(e_1 + e_2 + f_2) \end{bmatrix}$$

3) Điều kiện ràng buộc về độ bền.

Như đã phân tích trong phần trên, giá trị mômen trong phần tử 1 hoàn toàn giống giá trị mômen trong phần tử 3. Vậy ta chỉ xét điều kiện bền cho phần tử 1 và 2.

Phần tử 1:

Căn cứ vào các kết quả trong mục 1 (thành lập ma trận [k. A]), ta có điều kiện ràng buộc về độ bền:

$$M_{21}/ W_1 = (-d_1x_2 + f_1\theta_2)/ W_1 \le \sigma_1^*$$

$$6EI_1.x_2/ L_1^2.W_1 + 2E.I_1 . \theta_2/ L_1. W_1 \le \sigma_1^* \qquad (3.74)$$

Phần tử 2:

Vì $\theta_2 < 0$ nên ta có:

$$-M_{12}/W_2 = -M_{22}/W_2 = -(e_2 + f_2)\,\theta_2/W_2 \le \sigma_2^*$$

$$-6EI_2.\,\theta_2/L_2.\,W_2 \le \sigma_2^* \qquad (3.75)$$

Trong đó:

$\sigma_1^*;\sigma_2^*$ là ứng suất cho phép của các phần tử 1 và 2.

4) Điều kiện ràng buộc về độ cứng:

Theo yêu cầu của bài toán, ta có điều kiện ràng buộc về độ cứng:

$$x_2 \le 4\text{mm} \qquad (3.76)$$

5) Điều kiện ràng buộc về cân bằng.

Áp dụng công thức (3.62) và các kết quả trong mục 2 (thành lập ma trận độ cứng tổng thể **K**), ta có điều kiện ràng buộc về cân bằng:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 & -2d_1 \\ -2d_1 & 2(e_1 + e_2 + f_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Vậy:

$$2b_1.x_2 - 2d_1.\,\theta_2 = 1$$

$$-2d_1.x_2 + 2(e_1 + e_2 + f_2)\,\theta_2 = 0$$

Thay b_1, d_1, e_1, e_2, f_2 từ hệ thức (3.51) vào các phương trình trên, ta được:

$$\frac{12EI_1}{L^2}\left(\frac{2x_2}{L} + \theta_2\right) = 1$$

$$\frac{3I_1x_2}{L} + (2I_1 + 3I_2).\theta_2 = 0 \qquad (3.77)$$

6) Hàm mục tiêu

Áp dụng công thức (2.15) (chương hai), ta có hàm mục tiêu:

$$Z = \sum_{g=1}^{2} L_g A_g = 2000A_1 + 1000A_2 \qquad (3.78)$$

Căn cứ vào hệ thức (3.74), (3.75), (3.76) và các phương trình (3.77), (3.78) ta có bài toán quy hoạch phi tuyến:

Cực tiểu hóa hàm:

$$V = 2000\,A_1 + 1000\,A_2 \qquad (a)$$

với điều kiện:

$$\left.\begin{array}{ll} 6EI_1x_2/L^2.\,W_1 + 2EI_1.\,\theta_2/L.\,W_1 \le 0,15 & (b) \\ -6EI_2.\,\theta_2/L.\,W_2 \le 0,15 & (c) \\ x_2 \le 4 & (d) \\ (12EI_1/L^2)(2x_2/L + \theta_2) = 1 & (e) \\ 3I_1x_2/L + (2I_1 + 3I_2).\,\theta_2 = 0 & (f) \end{array}\right. \qquad (3.79)$$

Để giải bài toán trên đây bằng phương pháp đồ thị, ta thực hiện các bước sau:

- Giải x_2, θ_2 từ các phương trình (3.79e), (3.79f). x_2, θ_2 bây giờ là những hàm của I_1 và I_2.
- Thay x_2, θ_2 bằng các biểu thức vừa tìm được vào các điều kiện (3.79b), (3.79c), (3.79d).
- Áp dụng hệ thức (2.18a) để biểu thị I, W thông qua biến A.

Sau khi chỉnh lí kết quả tính toán, ta có bài toán quy hoạch phi tuyến:

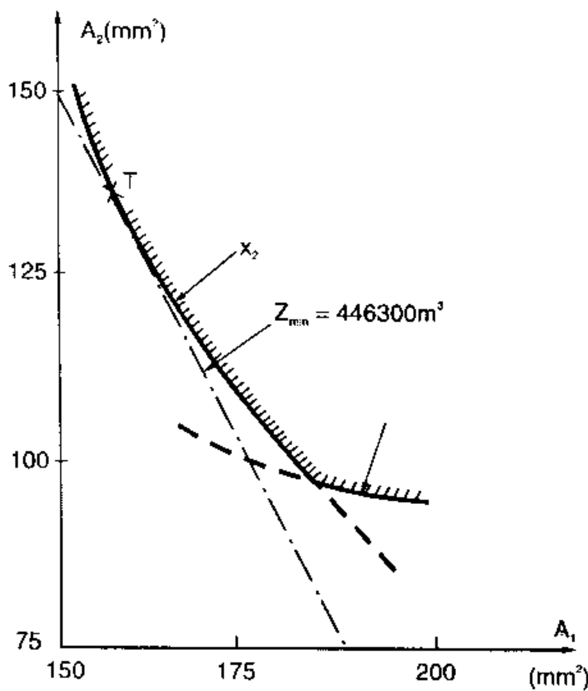
Cực tiểu hóa hàm:

$$\left.\begin{array}{ll} Z = 2000\,A_1 + 1000\,A_2 & (a) \\ \text{Với điều kiện:} & \\ \dfrac{345A_1^2 + 1035A_2^2}{A_1^3 + 6A_1^{3/2}.A_2^2} \le 0,15 & (b) \\ \dfrac{1,033.10^6\,A_2^{1/2}}{A_1^2 + 6A_2^2} \le 0,15 & (c) \\ \dfrac{1,258.10^5\left(2A_1^2 + 3A_2^2\right).10^5}{A_1^4 + 6A_1^2.A_2^2} \le 4 & (d) \\ A_1 \ge 0 \quad A_2 \ge 0 & \end{array}\right\} \qquad (3.80)$$

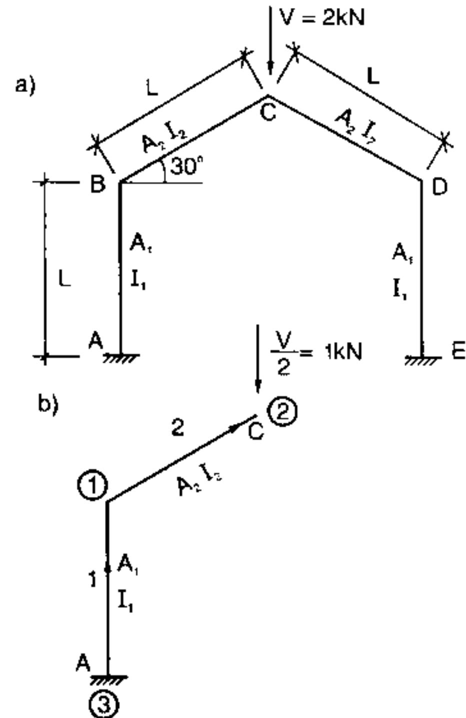
Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (3.8). Đường mang kí hiệu x_2 biểu thị điều kiện ràng buộc tới hạn (3.80d). Đường mang kí hiệu σ_A biểu thị điều kiện ràng buộc tới hạn (3.80b). Đường mức Z_{min} tiếp xúc với đường x_2 tại điểm T. Vậy thể tích cực tiểu của khung bằng $446300mm^3$.

Thí dụ 3.6

Cho một khung với tải trọng và đặc trưng hình học biểu thị trên hình (3.9), L = 1000mm. Chuyển vị cho phép trên phương thẳng đứng tại điểm C bằng 4,8m. Chuyển vị cho phép trên phương nằm ngang tại điểm B và D bằng 2,78mm. Ứng suất cho phép trong các phần tử bằng $0,15kN/mm^2$ (bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc).



Hình 3.8



Hình 3.9

Giải

Vì khung có tính chất đối xứng nên sơ đồ tính toán biểu thị như trên hình (3.9b). Mặt khác, do tính chất cấu tạo của khung, ta có các thành phần chuyển vị và quan hệ hình học như sau:

Tại nút 1: x_1, θ_1.

Tại nút 2: y_2

$$x_1 = y_2 \, tg\alpha_2 \tag{3.81}$$

Ta lần lượt thành lập hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc như sau;

1) Hàm mục tiêu

Áp dụng công thức (2.19a), ta có hàm thể tích:

$$V = 0,559\sum_{g=1}^{2} L_g I_g^{1/2} = 0,559\left(I_1^{1/2} + I_2^{1/2}\right)$$

Vậy hàm mục tiêu có dạng:

$$Z = I_1^{1/2} + I_2^{1/2} \tag{3.82}$$

2) Ma trận biến đổi chuyển vị **A**.

Lần lượt áp dụng các hệ thức (3.56), (3.57) cho các phần tử của khung.

Phần tử 1:

Phần tử 1 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 3 (gối tựa ngàm) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 1 (các thành phần chuyển vị là x_1, θ_1). Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc nên phần đóng góp của phần tử 1 vào ma trận A có dạng như sau:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Thay x_1 bằng hệ thức (3.81):

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -tg\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} . \begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

Phần tử 2 có đầu 1 quy tụ vào nút R = 1 (các thành phần chuyển vị là x_1, θ_1) và đầu 2 quy tụ vào nút S = 2 (thành phần chuyển vị là y_2).

Phần đóng góp của phần tử 2 vào ma trận A có dạng như sau:

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Thay x_1 bằng hệ thức (3.81) và rút gọn kết quả tính toán:

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sec\alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} . \begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Kết hợp các hệ thức ma trận trên, ta được ma trận biến đổi chuyển vị:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -tg\alpha_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sec\alpha_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\quad (\theta_1) \quad (y_2)$$

Vậy:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -tg\alpha_2 & 0 & 0 & \sec\alpha_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Áp dụng hệ thức (3.50), ta có ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} b_1 & d_1 & d_1 & & & \\ d_1 & e_1 & f_1 & & & \\ d_1 & f_1 & e_1 & & & \\ & & & b_2 & d_2 & d_2 \\ & & & d_2 & e_2 & f_2 \\ & & & d_2 & f_2 & e_2 \end{bmatrix}$$

Nhân bên phải ma trận k với ma trận A:

$$\mathbf{kA} = \begin{bmatrix} d_1 & -b_1 tg\alpha_2 \\ f_1 & -d_1 tg\alpha_2 \\ e_1 & -d_1 tg\alpha_2 \\ d_2 & b_2 \sec\alpha_2 \\ e_2 & d_2 \sec\alpha_2 \\ f_2 & d_2 \sec\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Q_1) \\ (M_{11}) \\ (M_{21}) \\ (Q_2) \\ (M_{12}) \\ (M_{22}) \end{matrix}$$

Áp dụng công thức (3.59) ta được vectơ nội lực:

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & -d_1 tg\alpha_2 \\ e_1 & -d_1 tg\alpha_2 \\ e_2 & d_2 \sec\alpha_2 \\ f_2 & d_2 \sec\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

3) Ma trận độ cứng tổng thể **K**

Thực hiện phép nhân ma trận, ta được:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}'.\mathbf{kA} = \begin{bmatrix} e_1 + e_2 & -d_1 tg\alpha_2 + d_2 \sec\alpha_2 \\ -d_1 tg\alpha_2 + d_2 \sec\alpha_2 & b_1 tg^2\alpha_2 + b_2 \sec^2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức (3.62):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 + e_2 & -d_1 tg\alpha_2 + d_2 \sec\alpha_2 \\ -d_1 tg\alpha_2 + d_2 \sec\alpha_2 & b_1 tg^2\alpha_2 + b_2 \sec^2\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

4) Điều kiện ràng buộc về độ bền;

Sau khi giải θ_1, y_2 từ phương trình trên, thay θ_1, y_2 bằng các biểu thức vừa tìm được vào

phương trình (3.83) và áp dụng các hệ thức (2.18b), (3.65), ta được các điều kiện ràng buộc về độ bền:

Tại mặt cắt C (hình 3.9):

$$\frac{2886I_2^{0,25}\left(5I_1+2I_2\right)}{I_2^2+32I_1.I_2+4I_2^2}\le 0,15 \tag{3.84}$$

Tại mặt cắt B:

$$\frac{2886I_1^{0,25}\left(I_1+4I_2\right)}{I_1^2+32I_1.I_2+4I_2^2}\le 0,15 \tag{3.85}$$

Tại mặt cắt A:

$$\frac{2886I_2^{0,25}\left(I_1+4I_2\right)}{I_1^2+32I_1.I_2+4I_2^2}\le 0,15 \tag{3.86}$$

5) Điều kiện ràng buộc về độ cứng

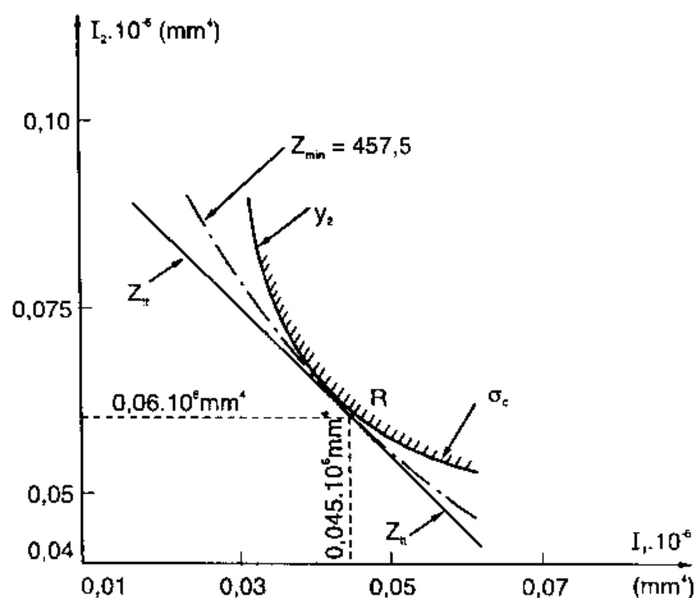
Theo yêu cầu bài toán, các điều kiện sau đây phải được thỏa mãn:

$$x_1 \le 2,78\text{mm},\ y_2 \le 4,8\text{mm}.$$

Nhưng vì $x_1 = y_2 tg\alpha_2 = y_2/\sqrt{3}$ nên $y_2 \le 2,78\sqrt{3} = 4,8$mm. Vậy chỉ cần thỏa mãn điều kiện ràng buộc về độ cứng tại điểm C là đủ. Bằng cách biến đổi tương tự như trên, ta có điều kiện ràng buộc về độ cứng tại điểm C:

$$y_2 = \frac{4832000(I_1+I_2)}{\left(I_1^2+32I_1.I_2+4I_2^2\right)}\le 4,8 \tag{3.87}$$

Tóm lại, ta có bài toán tối ưu: cực tiểu hóa hàm mục tiêu (3.82) thỏa mãn các điều kiện ràng buộc (3.84) - (387). Bài toán quy hoạch phi tuyến này gồm 2 biến I_1 và I_2. Kết quả giải theo phương pháp đồ thị ghi trên hình (3.10). Đường biên mang kí hiệu y_2 biểu thị điều kiện ràng buộc tới hạn (3.87). Đường biên mang kí hiệu σ_c biểu thị điều kiện ràng buộc tới hạn (3.84). Từ hình (3.10), ta đọc được phương án tối ưu: $Z_{min} = 457,5\text{mm}^2$ ứng với $I_1 = 0,06.10^6\text{mm}^4$ và $I_2 = 0,045.10^6\text{mm}^4$.



Hình 3.10

Để đơn giản hóa tính toán, đôi

khi người ta thay hàm mục tiêu phi tuyến bằng hàm mục tiêu tuyến tính, chẳng hạn thay hàm (3.82) bằng hàm

$$Z_{tt} = I_1 + I_2 \qquad (3.88)$$

Trên hình (3.10) đường thẳng mang kí hiệu Z_{tt} ứng với hàm mục tiêu (3.88). Với cách thay này, phương án tối ưu không có gì thay đổi (xem hình 3.10). Tuy nhiên, cần lưu ý một điều là nếu phương án tối ưu không xuất hiện tại một nút trên đường biên (điểm giao nhau giữa 2 đường biên ứng với 2 điều kiện ràng buộc tới hạn) thì việc tuyến tính hóa hàm mục tiêu sẽ dẫn đến những sai số đáng kể.

§3. PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA TỪNG MẪU ÁP DỤNG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU GIẢI THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Như trong phần trước đã trình bày, trong bài toán tối ưu giải theo phương pháp chuyển vị, biến xuất hiện dưới dạng tích của các đặc trưng hình học và các thành phần chuyển vị chẳng hạn như $I_g.x_j$, $I_g.y_j$, $I_j.\theta_j$ hoặc $c.A_g^2.x_j$, $c.A_g^2y_j$, $c.A_g^2.\theta_j$. Trong đó: A_g, I_g là diện tích và mômen quán tính thuộc nhóm g; x_j, y_j, θ_j; là các thành phần chuyển vị tại nút j; c là hằng số.

Để có điều kiện thực hiện phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu, trước hết ta hãy tách rời các biến theo những nguyên tắc đã được trình bày trong §5.3 chương một.

§3.1. Tách rời biến

Giả sử toàn bộ các biến biểu thị bằng diện tích A_g. Trước hết, ta tuyến tính hóa các điều kiện ràng buộc.

Đặt $$\varphi_{gi} = A_g^2.u_j \qquad 3.89)$$

Trong đó:

u_j- thành phần chuyển vị nào đó tại nút j. Lấy lôgarit 2 vế của hệ thức trên:

$$\log\varphi_{gi} = 2\log A_g + \log u_j$$

Trong phương trình lôgarit trên, các đại lượng A_g, u_j, φ_{gi} không thể triệt tiêu do đó phải đưa vào một số biến mới như sau.

Đối với biến A_g đưa vào biến mới không âm y_g sao cho:

$$A_g = y_g + \min A_g$$

min A_g là cận dưới của A_g. Ta có $A_g = \max A_g$ khi $y_g = \max y_g$.

Vậy:

$$\max y_g = \max A_g - \min A_g \qquad (3.90)$$

Kết hợp các hệ thức trên, ta có:

$$\left.\begin{aligned} & A_g = y_g + \min A_g \\ & 0 \le y_g \le \max A_g - \min A_g \end{aligned}\right\} \qquad (3.91)$$

Khi $y_g = 0$ thì $\log A_g = \log \min A_g$

Đối với biến u_j đưa vào biến mới không âm γ_g sao cho (xem §1.3 và §2.5):

$$u_j = \gamma_j - \Delta_j$$

$$2\Delta_j \geq \gamma_j \geq 0$$

Trong đó:

Δ_j- thành phần cho phép chuyển vị tại nút j.

Đặt:

$$\Delta_j = F_j - D_j \Rightarrow \tag{3.92}$$

$$u_j = \gamma_g + D_j - F_j$$

$$\Delta_j + F_j - D_j \geq \gamma_j \geq 0 \tag{3.93}$$

Có thể chọn giá trị D_j một cách tùy ý và căn cứ vào hệ thức (3.92) để xác định giá trị F_j. Thay A_g, u_j từ các hệ thức (3.91), (3.93) vào hệ thức (3.89):

$$\begin{aligned} A_g^2.u_j &= \left(y_g + \min A_g\right)^2.\left(\gamma_j + D_j - F_j\right) = \\ &= \left(y_g + \min A_g\right)^2.\left(\gamma_j + D_j\right) - F_j\left(y_g + \min A_g\right)^2 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Tích ở số hạng thứ nhất trong vế phải cần được tách rời. Ta đưa vào biến mới φ'_{gi} sao cho:

$$\varphi'_{gj} + B_{gj} = \left(y_g + \min A_g\right)^2\left(\gamma_j + D_j\right) \tag{3.95}$$

Từ (3.94) và (3.95) suy ra:

$$A_g^2.u_j = \left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right) - F_j\left(y_g + \min A_g\right)^2 \tag{3.94a}$$

Trong đó:

B_{gi}- hằng số dương. Lấy lôgarit 2 vế của đẳng thức (3.95):

$$\log\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right) = 2\log\left(y_g + \min A_g\right) + \log\left(\gamma_j + D_j\right) \tag{3.96}$$

Cận trên và cận dưới của $\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right)$ xác định như sau: Căn cứ vào hệ thức (3.90) và (3.95), $\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right)$ đạt tới giá trị cực đại khi $(y_g + \min A_g) \rightarrow \max(y_g + \min A_g) = \max A_g$ và $\gamma_j \rightarrow \max\gamma_j = \Delta_j + F_j - D_j$ (xem hệ thức (3.93)). Vậy

$$\max\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right) = (\max A_g)^2.(\Delta_j + F_j) \tag{3.97}$$

Mặt khác, $\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right)$ đạt đến giá trị cực tiểu khi $y_g = 0$ và $\gamma_j = 0$. Vậy:

$$\min\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right) = \left(\min A_g\right)^2.D_j \tag{3.98}$$

Cần chú ý rằng B_{gj} là một hằng số dương và φ'_{gj} là một biến không âm nên đồng thời

$$\min\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right) = B_{gj} = \left(\min A_g\right)^2.D_j \tag{3.99}$$

§3.2. Phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu

Như trên đã trình bày, các biến mới của bài toán tối ưu này là y_g, γ_g, φ'_{gi}

$$f_1(y_g) = \left(y_g + \min A_g\right)^2 \quad (3.100)$$

$$f_2(\varphi'_{gj}) = (\varphi'_{gj} + B_{gj}) \quad (3.101)$$

$$f_3(y_g) = \log(y_g + \min A_g) \quad (3.102)$$

$$f_4(\varphi'_{gj}) = \log(\varphi'_{gj} + B_{gj}) \quad (3.103)$$

Trong phạm vi biến thiên của y_g, ta chia trục y_g làm t đoạn giới hạn bởi (t + 1) điểm. Áp dụng hệ thức (1.85) (xem hình §5.22 chương một), ta có:

$$\hat{f}_1(y_g) = \sum_{t=0}^{t} \beta_{gt}.f_1(y_{gt}) \quad (3.104)$$

Trong đó: $f_1(y_{gt})$ là giá trị của hàm $f_1(y_g)$ tại điểm chia t (t = 0, 1, 2...). Tương tự như trên, ta có:

$$\hat{f}_3(y_g) = \sum_{t=0}^{t} \beta_{gt}.Y_{gt} \quad (3.105)$$

$$Y_{gt} = \log(y_{gt} + \min A_{gt}) \quad (3.106)$$

Y_{gt} là giá trị của hàm $\log(y_g + \min A_g)$ tại điểm chia t.

Trong phạm vi biến thiên của $\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right)$, ta chia trục $\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right)$ làm s đoạn giới hạn bởi (s + 1) điểm. Tương tự như trên, ta có:

$$\hat{f}_2(\varphi'_{gj}) = \sum_{n=0}^{s} \beta_{gjn}.f_2(\varphi'_{gjn}) \quad (3.107)$$

$f_2(\varphi'_{gjn})$- giá trị của hàm $\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right)$ tại điểm chia n (n = 0, 1, 2... s)

$$\hat{f}_4(\varphi'_{gj}) = \sum_{n=0}^{s} \beta_{gjn}.W_{gjn} \quad (3.108)$$

$$W_{gjn} = \log\left(\varphi'_{gjn} + B_{gjn}\right) \quad (3.109)$$

W_{gjn} là giá trị của hàm $\log\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right)$ tại điểm chia n (n = 0, 1, 2...)

Cần chú ý rằng khi g biến thiên từ nhóm này sang nhóm khác, từ phương trình lôgarit (3.96), ta suy ra hệ thức:

$$\log\left(\varphi'_{gj} + B_{gj}\right) - 2\log(y_g + \min A_g) = \log\left(\varphi'_{1j} + B_{1j}\right) - 2\log(y_1 + \min A_1) =$$
$$= \log\left(\varphi'_{2j} + B_{2j}\right) - 2\log(y_2 + \min A_2) =$$
$$= \log\left(\varphi'_{Gj} + B_{Gj}\right) - 2\log(y_G + \min A_G) = \qquad (3.110)$$
$$= \log(\gamma_j + D_j)$$

Trên đây, ta giả thiết có G nhóm cấu kiện nên G = 1, 2,... G. Căn cứ vào các hệ thức (3.102), (3.103), (3.105), (3.108), (3.110), ta suy ra các điều kiện ràng buộc lôgarit:

$$\sum_{n=0}^{s} \beta_{1jn} W_{1jn} - 2\sum_{t=0}^{t} \beta_{1t} Y_{1t} - \sum_{n=0}^{s} \beta_{gjn} W_{gjn} + 2\sum_{t=0}^{t} \beta_{gt} Y_{gt} = 0 \qquad (3.111)$$

$g = 2, 3,..., G$

Vì hàm mục tiêu (2.17) (xem chương 2) chứa biến A_g nên cần tuyến tính hóa hàm

$$f_5(y_g) = y_g + \min A_g \qquad (3.12)$$

$$\Rightarrow \hat{f}_5(y_g) = \sum_{t=0}^{t} \beta_{gt} f_5(y_{gt}) \qquad (3.113)$$

Trong đó: $f_5(y_{gt})$ là giá trị của hàm (y_g + min A_g) tại điểm chia t.

Vậy sau khi được tuyến tính hóa, hàm mục tiêu (2.17) có dạng:

$$\hat{Z} = \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{I'} C_i \gamma_i L_i \sum_{t=0}^{t} \beta_{gt} . f_5(y_{gt}) \qquad (3.114)$$

Thí dụ 3.7.

Đầu đề giống như thí dụ (3.5). Dùng phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu để giải bài toán tối ưu.

Giả sử cận dưới và cận trên của A_g là:

min A_g = 120mm², max A_g = 160mm²

Giải

Thay E = 207kN/mm², L = 1000mm vào phương trình (3.77) và áp dụng hệ thức (2.18), ta có điều kiện ràng buộc về cân bằng:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ 0{,}002A_1^2.x + 2A_1^2.\theta = 125{,}8 \\ &b)\ 0{,}003A_1^2.x + 2A_1^2.\theta + 3A_2^2.\theta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.115)$$

Trong các hệ thức sau, ta sẽ dùng chỉ số x để biểu thị các đại lượng có liên quan đến thành phần chuyển vị thẳng đứng và dùng chỉ số θ để biểu thị các đại lượng có liên quan đến thành phần chuyển vị xoay.

Ta xác định cận trên và cận dưới của $\left(\varphi'_x + B_x\right)$ và $\left(\varphi'_\theta + B_\theta\right)$ như sau:

Theo yêu cầu của bài toán, thành phần chuyển vị cho phép x bằng $\Delta = 4$mm. Thay $D_x = 2$ vào hệ thức (3.92) ta được $F_x = 6$. Áp dụng hệ thức (3.97) ta được:

$$\max\left(\varphi_x' + B_x\right) = 153600$$

Áp dụng hệ thức (3.98)

$$\min\left(\varphi_x' + B_x\right) = 28800$$

Các cận trên và cận dưới của $\left(\varphi_\theta' + B_\theta\right)$ xác định như sau. Khi $A_1 = A_2 = \min A_g = 120\text{mm}^2$, hệ phương trình (3.115) cho $\theta = -0{,}0038$ radian. Khi $A_1 = A_2 = \max A_g = 160\text{mm}^2$, hệ phương trình (3.115) cho $\theta = -0{,}0021$ radian. Thay $D_\theta = 0{,}0012$ vào hệ thức (3.92), ta được $F_\theta = 0{,}005$. Áp dụng hệ thức (3.97):

$$\max\left(\varphi_\theta' + B_\theta\right) = 43{,}52$$

Áp dụng hệ thức (3.98):

$$\min\left(\varphi_\theta' + B_\theta\right) = 17{,}28$$

Căn cứ vào các cận trên, ta thành lập bảng (3.7) để ghi giá trị của các hàm $f_1(y)$, $f_3(y)$, $f_2\left(\varphi_{gi}'\right)$, $f_4\left(\varphi_{gi}'\right)$, $f_5(y)$ ứng với các điểm chia t và s.

Bảng (3.7) được thành lập theo nguyên tắc sau. Căn cứ vào bất đẳng thức (3.91) biến y_g biến thiên trong khoảng từ 0 đến $\max A_g - \min A_g = 160 - 120 = 40\text{mm}^2$. Ta chia khoảng biến thiên đó làm 7 đoạn bằng nhau giới hạn bởi 8 điểm chia (hàng thứ 1 bảng 3.7). Căn cứ vào các kết quả tính toán trong phần trên, biến $\left(\varphi_x' + B_x\right)$ biến thiên trong khoảng từ 28800 đến 153600; biến $\left(\varphi_\theta' + B_\theta\right)$ biến thiên trong khoảng từ 17,28 đến 43,52.

Bảng 3.7

y	0	10	15	20	25	30	35	40
$(y + 120)^2$	14400	16900	18225	19600	21025	22500	24025	25600
$\log(y + 120)$	2,0792	2,1139	2,1303	2,1464	2,1614	2,1761	2,1903	2,2041
$\varphi_x' + B_x$	28800	46420	64450	82280	100110	117940	135770	153600
$\log\left(\varphi_x' + B_x\right)$	4,4594	4,6676	4,8092	4,9153	5,0005	5,0715	5,1389	5,1864
$\varphi_\theta' + B_\theta$	17,28	21,03	24,78	28,53	32,28	36,03	39,78	43,52
$\log\left(\varphi_\theta' + B_\theta\right)$	1,2375	1,3228	1,3941	1,4553	1,5090	1,5567	1,5997	1,6387

Căn cứ vào các số liệu trong bảng (3.7), ta tiến hành tuyến tính hóa các hàm $A_1^2.x$, $A_1^2\theta$, $A_2^2\theta$ trong phương trình (3.115). Chẳng hạn áp dụng (3.94a), ta có:

$A_1^2\theta = 17{,}28\beta_{1\theta 0} + 21{,}03\beta_{1\theta 1} + 24{,}78\beta_{1\theta 2} + 28{,}53\beta_{1\theta 3} + 32{,}28\beta_{1\theta 4} + 36{,}03\beta_{1\theta 5} + 39{,}78\beta_{1\theta 6} +$
$+ 43{,}52\beta_{1\theta 7} - 0{,}005\,(14400\beta_{10} + 16900\beta_{11} + 18225\beta_{12} + 19600\beta_{13} + 21025\beta_{14} + 22500\beta_{15}$
$+ 24025\beta_{16} + 25600\beta_{17}).$

Trong biến $\beta_{i\theta j}$, chỉ số i biểu thị phần tử thuộc nhóm i, chỉ số j biểu thị điểm chia thứ j, chỉ số θ ứng với góc xoay. Bằng cách tương tự như trên, điều kiện ràng buộc (3.115a) được tuyến tính hóa như sau:

$0{,}002.\,(28800\beta_{1xo} + 46420\beta_{1x1} + 64450\beta_{1x2} + 82280\beta_{1x3} + 100110\beta_{1x4} + 117940\beta_{1x5} +$
$135700\beta_{1x6} + 153600\beta_{1x7}) + 17{,}28\beta_{1\theta 0} + 21{,}03\beta_{1\theta 1} + 24{,}78\beta_{1\theta 2} + 28{,}53\beta_{1\theta 3} + 32{,}28\beta_{1\theta 4} +$
$36{,}03\beta_{1\theta 5} + 39{,}78\beta_{1\theta 6} + 43{,}52\beta_{1\theta 7} - 0{,}017.(14400\beta_{10} + 16900\beta_{11} + 18225\beta_{12} + 19600\beta_{13} +$
$21025\beta_{14} + 22500\beta_{15} + 24025\beta_{16} + 25600\beta_{17}) = 125{,}8.$

Điều kiện ràng buộc (3.115b) có dạng:

$0{,}003(28800\beta_{1xo} + 46420\beta_{1x1} + 64450\beta_{1x2} + 82280\beta_{1x3} + 100110\beta_{1x4} + 117940\beta_{1x5} +$
$135700\beta_{1x6} + 153600\beta_{1x7}) - 0{,}028\,(14400\beta_{10} + 16900\beta_{11} + 18225\beta_{12} + 19600\beta_{13} + 21025\beta_{14}$
$+ 22500\beta_{15} + 24025\beta_{16} + 25600\beta_{17}) + 2.(17{,}28\beta_{1\theta 0} + 21{,}03\beta_{1\theta 1} + 24{,}78\beta_{1\theta 2} + 28{,}53\beta_{103} +$
$32{,}28\beta_{1\theta 4} + 36{,}03\beta_{1\theta 5} + 39{,}78\beta_{1\theta 6} + 43{,}52\beta_{1\theta 7}) + 3.\,(17{,}28\beta_{2\theta o} + 21{,}031\beta_{2\theta 1} + 24{,}78\beta_{2\theta 2} +$
$28{,}53\beta_{2\theta 3} + 32{,}28\beta_{2\theta 4} + 36{,}03\beta_{2\theta 5} + 39{,}78\beta_{2\theta 6} + 43{,}52\beta_{2\theta 7}) - 0{,}015.\,(14400\beta_{20} + 16900\beta_{21} +$
$18225\beta_{22} + 19600\beta_{23} + 21025\beta_{24} + 22500\beta_{25} + 24025\beta_{26} + 25600\beta_{27}) = 0$

Áp dụng hệ thức (1.87) (xem §5.2 chương một).

$$\beta_{1xo} + \beta_{1x1} + \beta_{1x2} + \beta_{1x3} + \beta_{1x4} + \beta_{1x5} + \beta_{1x6} + \beta_{1x7} = 1$$
$$\beta_{1\theta 0} + \beta_{1\theta 1} + \beta_{1\theta 2} + \beta_{1\theta 3} + \beta_{1\theta 4} + \beta_{1\theta 5} + \beta_{1\theta 6} + \beta_{1\theta 7} = 1$$
$$\beta_{2\theta o} + \beta_{2\theta 1} + \beta_{2\theta 2} + \beta_{2\theta 3} + \beta_{2\theta 4} + \beta_{2\theta 5} + \beta_{2\theta 6} + \beta_{2\theta 7} = 1$$
$$\beta_{10} + \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{14} + \beta_{15} + \beta_{16} + \beta_{17} = 1$$
$$\beta_{20} + \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} + \beta_{24} + \beta_{25} + \beta_{26} + \beta_{27} = 1$$

Căn cứ vào điều kiện ràng buộc lôgarit (3.111) ta có các phương trình:

$4{,}459\beta_{1xo} + 4{,}6676\beta_{1x1} + 4{,}8092\beta_{1x2} + 4{,}9153\beta_{1x3} + 5{,}0005\beta_{1x4} + 5{,}0715\beta_{1x5} + 5{,}1389\beta_{1x6} +$
$5{,}1864\beta_{1x7} - 2.(2{,}0792\beta_{10} + 2{,}1139\beta_{11} + 2{,}1303\beta_{12} + 2{,}1461\beta_{13} + 2{,}1614\beta_{14} + 2{,}176\beta_{15} +$
$2{,}1903\beta_{16} + 2{,}2041\beta_{17}) + 2.(2{,}0792\beta_{20} + 2{,}1139\beta_{21} + 2{,}1303\beta_{22} + 2{,}1461\beta_{23} + 2{,}1614\beta_{24} +$
$2{,}176\beta_{25} + 2{,}1903\beta_{26} + 2{,}2041\beta_{27}) = 0$

$1{,}2375\beta_{1\theta 0} + 1{,}3228\beta_{101} + 1{,}3941\beta_{1\theta 2} + 1{,}4553\beta_{1\theta 3} + 1{,}5090\beta_{1\theta 4} + 1{,}5567\beta_{1\theta 5} + 1{,}5997\beta_{106}$
$+ 1{,}6387\beta_{107} - 2.(2{,}0792\beta_{10} + 2{,}1139\beta_{11} + 2{,}1303\beta_{12} + 2{,}1461\beta_{13} + 2{,}1614\beta_{14} + 2{,}176\beta_{15} +$
$2{,}1903\beta_{16} + 2{,}2041\beta_{17}) - (1{,}2375\beta_{2\theta 0} + 1{,}3228\beta_{2\theta 1} + 1{,}3941\beta_{2\theta 2} + 1{,}4553\beta_{2\theta 3} + 1{,}5090\beta_{2\theta 4} +$
$1{,}5567\beta_{205} + 1{,}5997\beta_{2\theta 6} + 1{,}6387\beta_{2\theta 7}) + 2.(2{,}0792\beta_{20} + 2{,}1139\beta_{21} + 2{,}1303\beta_{22} + 2{,}1461\beta_{23}$
$+ 2{,}1614\beta_{24} + 2{,}176\beta_{25} + 2{,}1903\beta_{26} + 2{,}2041\beta_{27}) = 0$

Căn cứ vào phương trình (3.78) (xem thí dụ 3.5) và các hệ thức (3.112), (3.114), hàm mục tiêu được tuyến tính hóa như sau:

$\hat{Z} = 2000.\,(120\beta_{10} + 130\beta_{11} + 135\beta_{12} + 140\beta_{13} + 145\beta_{14} + 150\beta_{15} + 155\beta_{16} + 160\beta_{17}) +$
$1000.\,(120\beta_{20} + 130\beta_{21} + 135\beta_{22} + 140\beta_{23} + 145\beta_{24} + 150\beta_{25} + 155\beta_{26} + 160\beta_{27}).$

Bài toán quy hoạch tuyến tính này gồm 40 biến. Chỉ có thể giải nó bằng phương pháp đơn hình trên máy tính điện tử.

§4. BÀI TOÁN QUY HOẠCH NGUYÊN

Trong các bài toán tối ưu trình bày ở trong phần trước, các đặc trưng hình học của tiết diện (diện tích, mômen quán tính...) đã được xem như những đại lượng có giá trị liên tục. Trong thực tế, để tiện cho việc thiết kế, chế tạo và thi công, tiết diện kết cấu thường được định hình hóa. Do đó, người kĩ sư th ờng căn cứ vào kết quả tính toán và số tay thiết kế để chọn tiết diện hợp lí. Điều này cho ta thấy các đặc trưng hình học của tiết diện là những đại lượng có tính chất rời rạc, không liên tục. Chẳng hạn, đối với tiết diện hình chữ I, ta đọc được từ sổ tay thiết kế các số liệu sau đây (bảng 3.8)

Bảng 3.8

Số liệu mặt cắt chữ I	A (cm^3)	I (cm^4)	W_x cm^3)
N° 14	17,4	572	81,7
N° 14	20,2	873	109
N° 18	23,4	1290	143

Vì vậy, khi giải bài toán tối ưu, ta lấy tròn số các kết quả tính toán và từ sổ tay thiết kế chọn các giá trị đặc trưng hình học xấp xỉ với kết quả tính toán. Để thiết kế được an toàn, các giá trị đặc trưng hình học được chọn thường lớn hơn so với kết quả tối ưu. Do đó, bài toán trở thành không hoàn toàn tối ưu theo ý muốn của người thiết kế.

Để khắc phục tình trạng trên, ta có thể chọn ra từ số tay thiết kế một số tiết diện định hình và lập bài toán quy hoạch nguyên như sau.

Ta đã biết rằng trong bài toán tối ưu giải theo phương pháp chuyển vị, các đặc trưng hình học xuất hiện trong hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc là: diện tích A, mômen quán tính I, khoảng cách từ thớ trung hòa đến thớ biên y. Các đại lượng này xuất hiện đồng thời với các thành phần chuyển vị trong các tử thức dưới dạng I_g, u_j, y_g... Trong đó I_g, y_g thuộc các phần tử của nhóm g, u_j là một thành phần chuyển vị nào đó tại nút j. Giả sử ta chọn ra t tiết diện định hình ứng với các giá trị đặc trưng hình học: A_{g1}, A_{g2}, A_{g3}... A_{gt}; I_{g1}, I_{g2}... I_{gt}; y_{g1}; y_{g2},..., y_{gt}. Gọi A_g', I_g', y_g' là các giá trị đặc trưng hình học mà ta sẽ chọn theo phương pháp tối ưu cho các phần tử của nhóm g. Ta viết:

$$A_g' = A_{g1}\delta_{g1} + A_{g2}\delta_{g2} + ... + A_{gt}\delta_{gt} \tag{3.116}$$

$$I_g' = I_{g1}\delta_{g1} + I_{g2}\delta_{g2} + ... + I_{gt}\delta_{gt} \tag{3.117}$$

$$y_g' = y_{g1}\delta_{g1} + A_{g2}\delta_{g2} + ... + y_{gt}\delta_{gt} \tag{3.118}$$

g= 1, 2, ... G (giả sử kết cấu có G nhóm). Các biến δ_{g1}, δ_{g2},..., δ_{gt} phải thỏa mãn điều kiện:

$$\delta_{g1} + \delta_{g2} + ... + \delta_{gt} = 1 \tag{3.119}$$

$$\delta_{gi} = 0 \text{ hoặc } 1 \quad g = 1, 2,... G$$

Trong điều kiện ràng buộc (3.119), chỉ cho phép một biến và chỉ một mà thôi bằng đơn vị nghĩa là nếu $\delta_{gk} = 1$ thì mọi $\delta_{gi} = 0$ với $i \neq k$. Lúc này ta có phương án tối ưu:

$$A'_g = A_{gk}$$
$$I'_g = I_{gk} \quad (3.120)$$
$$y'_g = y_{gk}$$

Để lập bài toán quy hoạch nguyên, ta thực hiện các bước sau:

- Thay các đặc trưng hình học A_g, I_g, y_g trong hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc bằng các biểu thức ở vế phải của các đẳng thức (3.116), (3.117), (3.118).

- Bổ sung điều kiện ràng buộc (3.119).

- Tiến hành tuyến tính hóa các điều kiện ràng buộc.

Các biến δ_{gi} trong bài toán quy hoạch nguyên vừa được thành lập là những số nguyên. Có thể giải bài toán này bằng phương pháp đơn hình.

Thí dụ 3.8.

Đầu đề giống thí dụ (3.5).

Để lập bài toán quy hoạch nguyên, trước hết từ sổ tay thiết kế, ta chọn ra 4 tiết diện định hình chữ L, ứng với các giá trị đặc trưng hình học ghi trong bảng (3.9).

Bảng 3.9

Số hiệu tiết diện hình chữ L	A (mm^2)	I (mm^4)	y (mm)
2	113	4000	14
2,5	143	8100	17,7
2,8	162	11600	20
3,2	186	17700	23,1

Căn cứ vào các số liệu trong bảng (3.9) ta có:

$A_{g1} = 113mm^2$; $A_{g2} = 143mm^2$; $A_{g3} = 162mm^2$; $A_{g4} = 186mm^2$

$I_{gi} = 4000mm^4$; $I_{g2} = 8100mm^4$; $I_{g3} = 11600mm^4$; $I_{g4} = 17700mm^4$

$y_{g1} = 14mm$; $y_{g2} = 17,7mm$; $y_{g3} = 20mm$; $y_{g4} = 23,1$

Căn cứ vào các số liệu trên, ta thay các đặc trưng hình học A, I, y bằng các biểu thức tương ứng ở vế phải của (3.116), (3.117), (3.118).

1) Hàm mục tiêu (3.79a) (xem thí dụ 3.5): g = 1,2, t = 4 →

$$Z = 2000\,(113\delta_{11} + 143\delta_{12} + 162\delta_{13} + 186\delta_{14}) + 1000(113\delta_{21} + 143\delta_{22} + 162\delta_{23} + 186\delta_{24})$$

2) Các điều kiện ràng buộc về độ bền (3.79b), (3.79c):

Thay $W_1 = I_1/y_1$ $\quad W_2 = I_2/y_2$ →

$$\frac{2E}{L}\left(\frac{3x_2}{L} + \theta_2\right).\left(14\delta_{11} + 17,7\delta_{12} + 20\delta_{13} + 23,1\delta_{14}\right) \le 0,15$$

$$-6E\theta_2 = (14\delta_{21} + 17{,}7\delta_{22} + 20\delta_{23} + 23{,}1\delta_{24}) \le 0{,}15$$

3) Điều kiện ràng buộc về độ cứng (3.79d):

$$x_2 \le 4\text{mm}$$

4) Các điều kiện ràng buộc về cân bằng (3.79e), (3.79f):

$$\frac{12E}{L^2}\left(\frac{2x_2}{L} + \theta_2\right).(4000\delta_{11} + 8100\delta_{12} + 11600\delta_{13} + 17700\delta_{14}) = 1$$

$$\frac{3x_2}{L} + 2\theta_2.(4000\delta_{11} + 8100\delta_{12} + 11600\delta_{13} + 17700\delta_{14}) +$$
$$+3\theta_2(4000\delta_{21} + 8100\delta_{22} + 11600\delta_{23} + 17700\delta_{24}) = 0$$

Ngoài ra, cần bổ sung thêm điều kiện ràng buộc (3.119):

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1$$
$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} = 1$$

Đối với bài toán quy hoạch nguyên trên, ta có mấy nhận xét như sau:

1) Với giả thiết các đặc trưng hình học là những biến liên tục, bài toán tối ưu chỉ có 4 ẩn (xem thí dụ 3.5). Trong bài toán quy hoạch nguyên, ta có 10 ẩn trong đó 8 ẩn là những số nguyên, 2 ẩn còn lại x_2 và θ_2 có thể là những số không nguyên. Đây là bài toán quy hoạch hỗn hợp. Số ẩn tăng lên rõ rệt đặc biệt khi số nhóm càng nhiều.

2)Trong bài toán quy hoạch nguyên, các đặc trưng hình học không phụ thuộc lẫn nhau như trong các bài toán tối ưu đã được trình bày trong phần trước.

3) Để giải bài toán quy hoạch nguyên bằng phương pháp đơn hình, cần tiến hành tách rời biến và tuyến tính tính hóa các điều kiện ràng buộc (xem §3).

Vì những lí do trên, khối lượng tính toán tăng lên đáng kể.

Chương bốn
BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH KẾT CẤU TRONG GIAI ĐOẠN CHẢY DẺO

§1. KHÁI NIỆM

Trong các chương hai và ba, ta đã thành lập các bài toán tính kết cấu trong giai đoạn đàn hồi.

Chương này sẽ giới thiệu một số bài toán tối ưu tính kết cấu trong giai đoạn chảy dẻo.

Ta đã biết rằng, khi vật liệu *chảy dẻo*, các *khớp dẻo* hình thành tại một số tiết diện trong kết cấu. Khớp dẻo giống với khớp thực ở chỗ có thể xoay được nhưng lại khác với khớp thực là mômen xuất hiện tại khớp dẻo và có giá trị không đổi. Ta gọi mômen này là *mômen dẻo* M_d. Mômen dẻo có thể viết:

$$M_d = \sigma_{ch} . W_d \tag{4.1}$$

Trong đó:

σ_{ch}- giới hạn chảy của vật liệu;

W_d- mômen chống uốn dẻo của tiết diện.

Trong lí thuyết dẻo, W_d là đặc trưng hình học duy nhất của tiết diện. Biết được W_d ta có thể xác định được mômen dẻo. Ngược lại, biết được M_d ta có thể xác định được W_d tức là kích thước của tiết diện.

Sự xuất hiện của các khớp dẻo với số lượng thích hợp tại những vị trí thích hợp trong kết cấu có thể làm cho kết cấu trở thành biến hình và dẫn đến sự phá hoại của nó. Sơ đồ phá hoại cục bộ hoặc toàn bộ của kết cấu sau khi các khớp dẻo hình thành gọi là *cơ cấu phá hoại.* Ta sẽ nghiên cứu vấn đề này trong phần sau.

Có 2 loại bài tối tối ưu tính kết cấu trong giai đoạn chảy dẻo.

1) Bài toán tối ưu xác định hệ số tải trọng (kích thước hình học của kết cấu đã biết tức là giá trị mômen dẻo M_d đã biết).

2) Bài toán tối ưu xác định trọng lượng nhỏ nhất của kết cấu (M_d là đại lượng cần phải tìm).

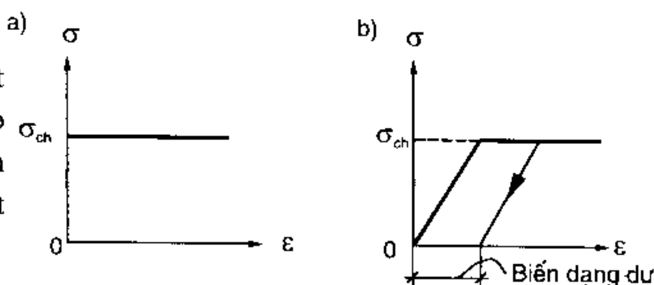
Khi tính kết cấu trong giai đoạn chảy dẻo, người ta dựa trên 2 giả thuyết cơ bản sau đây:

1. Giả thuyết *cứng dẻo.*

2. Giả thuyết *đàn hồi - dẻo.*

Sơ đồ lí tưởng hóa theo giả thuyết cứng - dẻo biểu thị trên hình (4.1a). Theo giả thuyết này, người ta bỏ qua các biến dạng đàn hồi và chỉ nghiên cứu sự phát triển của biến dạng dẻo.

Sơ đồ lí tưởng hóa theo giả thuyết đàn hồi - dẻo biểu thị trên hình (4.1b). Theo giả thuyết này, người ta xét đồng thời biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo.



Hình 4.1

Giả thuyết đàn hồi - dẻo phù hợp với điều kiện làm việc thực tế so với giả thuyết cứng-dẻo. Nhưng phương pháp tính toán dựa trên giả thuyết cứng- dẻo lại đơn giản hơn nhiều so với phương pháp dựa trên giả thuyết đàn hồi- dẻo.

Vì lẽ đó, đại bộ phận các bài toán tối ưu sau này sẽ được xây dựng trên giả thuyết cứng- dẻo.

§.2. BÀI TOÁN TỐI ƯU DỰA TRÊN GIẢ THUYẾT CỨNG- DẺO

Như trong phần trên đã trình bày, khi vật liệu chảy dẻo, dưới tác dụng của tải trọng tăng dần, các khớp dẻo sẽ lần lượt hình thành tại một số tiết diện trong kết cấu. Đối với kết cấu siêu tĩnh với bậc siêu tĩnh bằng n, sự hình thành của (n+1) khớp dẻo cũng đủ tạo thành một cơ cấu phá hoại toàn bộ. Khi phá hoại cục bộ, số khớp dẻo có thể ít hơn.

Để giải bài toán tối ưu xác định hệ số tải trọng cũng như xác định trọng lượng bé nhất của kết cấu trên cơ sở của giả thuyết cứng- dẻo, cần phải tiến hành các bước sau đây:

1. Dự kiến mọi tiết diện trên kết cấu tại đó có khả năng hình thành các khớp dẻo. Ta gọi tiết diện đó là *tiết diện tới hạn.*

2. Dự kiến mọi cơ cấu phá hoại có thể xảy ra.

3. Lập bài toán quy hoạch tuyến tính.

§2.1. Một số giả thiết cơ bản.

Bài toán tối ưu dựa trên giả thuyết cứng dẻo xuất phát từ các giả thiết cơ bản sau đây:

1. Bỏ qua các biến dạng đàn hồi.

2. Các tải trọng tác dụng lên kết cấu cùng tăng theo một tỉ lệ như nhau. Ta biểu thị tỉ lệ này qua *hệ số tải trọng* λ.

3. Đặc trưng hình học duy nhất W_d (mômen chống uốn dẻo) được xem là một đại lượng có tính chất liên tục.

4. Trọng lượng trên một đơn vị dài của phần tử và mômen dẻo M_d liên hệ bởi hệ thức sau đây:

$$q = a.M_d^b \tag{4.2}$$

Trong đó: a = 2,86 ; b = 0,6

Hệ thức (4.2) làm cho bài toán trở nên phi tuyến. Do đó, để đơn giản hóa tính toán, người ta thay hệ thức trên bằng hệ thức tuyến tính:

$$q = c + d.\ M_d \tag{4.3}$$

Trong đó: c, d là những hằng số. Sự thay thế này mang lại sai số không đáng kể.

§2.2. Tiết diện tới hạn và cơ cấu phá hoại

Trước khi lập bài toán tối ưu, cần dự kiến mọi tiết diện tới hạn và mọi cơ cấu phá hoại. Các tiết diện tới hạn có thể xuất hiện tại những vị trí sau đây:

1. Khi kết cấu chịu tác dụng của các lực tập trung (lực hoặc mômen) các khớp dẻo có khả năng xuất hiện tại các vị trí: gối tựa, nút, điểm đặt lực tập trung, điểm tiết diện thay đổi.

2. Khi khung chịu tác dụng đồng thời của tải trọng phân bố, khớp dẻo có khả năng xuất hiện tại mặt cắt M_{max} hoặc mặt cắt M_{min}.

Chẳng hạn, đối với khung trên hình (4.2a), các khớp dẻo có khả năng xuất hiện tại các tiết diện 1, 2, 3, 4,5, 6, 7.

Cơ cấu phá hoại của khung bao gồm các dạng sau đây:

- Cơ cấu phá hoại dầm.
- Cơ cấu phá hoại đảo.
- Cơ cấu phá hoại nút.
- Cơ cấu phá hoại hỗn hợp.

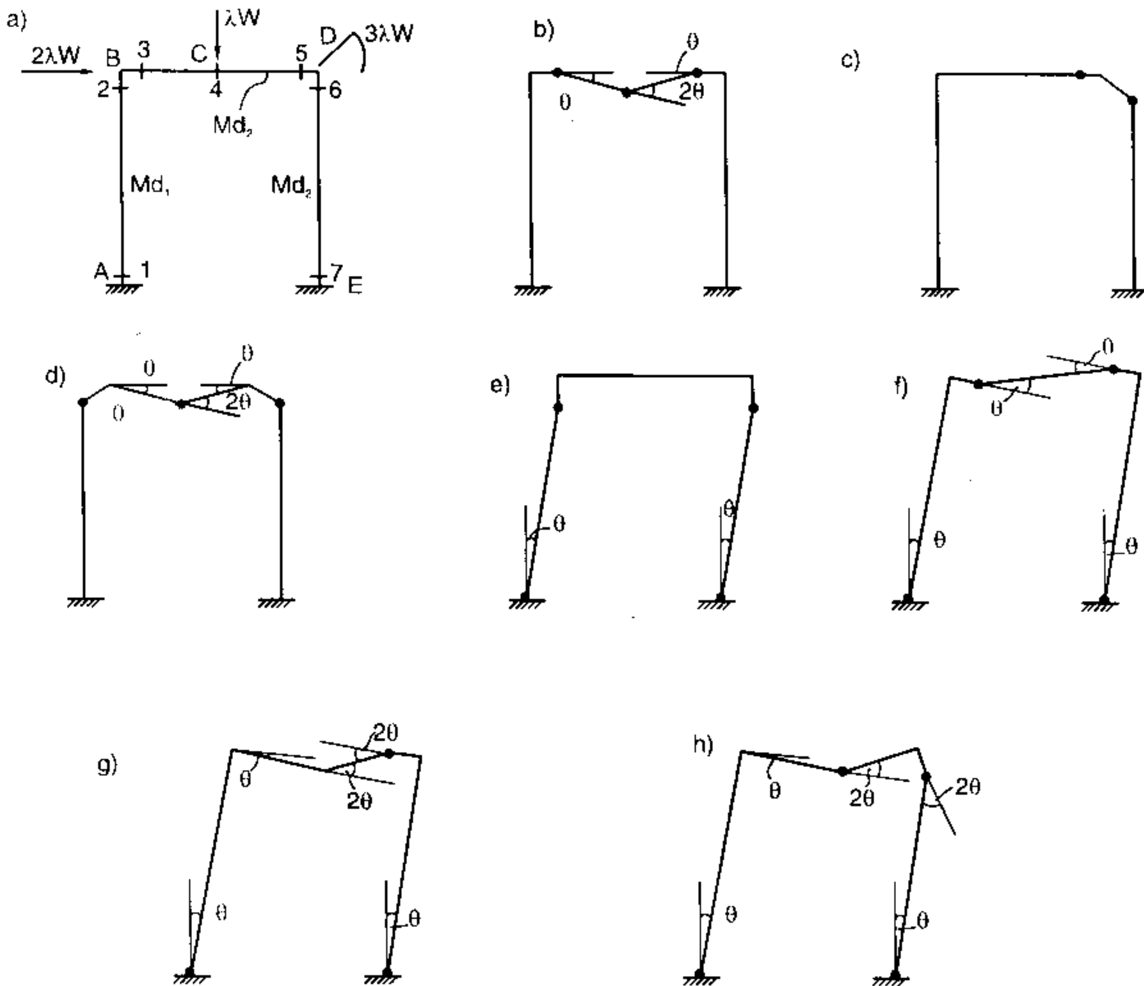
Trong cơ cấu phá hoại dầm, hoặc 3 khớp dẻo hình thành trong phạm vi dầm (hình 4.2b) hoặc một khớp dẻo hình thành giữa dầm và hai khớp dẻo khác hình thành ở các đầu cột (hình 4.2d). Trong cơ cấu phá hoại dầm, chỉ có dầm là bị phá hoại, cột không bị phá hoại nên cơ cấu phá hoại này có tính chất cục bộ.

Trong cơ cấu phá hoại đảo, hoặc một số khớp dẻo hình thành ở các đầu cột (hình 4.2e) hoặc một số khớp dẻo hình thành ở các chân cột, một số khớp dẻo hình thành ở các đầu dầm (hình 4.2f). Cơ cấu phá hoại đảo có khả năng làm cho khung bị đảo dưới tác dụng của tải trọng ngang.

Trong cơ cấu phá hoại nút, các khớp dẻo hình thành tại các đầu thanh quy tụ tại các nút (hình 4.2c). Cơ cấu phá hoại nút có khả năng làm cho nút bị phá hoại cục bộ.

Trong cơ cấu phá hoại dầm và cơ cấu phá hoại đảo, khớp dẻo hình thành ở đầu dầm hay đầu cột là tùy thuộc vào tỉ số giữa mômen dẻo trong dầm và mômen dẻo trong cột. Nếu M_d (dầm) > M_d (cột), khớp dẻo sẽ hình thành tại đầu cột (hình 4.2d, 4.2e). Ngược lại, nếu M_d (dầm) < M_d (cột), khớp dẻo sẽ hình thành tại đầu dầm (hình 4.2b, 4.2f).

Cơ cấu phá hoại dầm, cơ cấu phá hoại đảo, cơ cấu phá hoại nút là 3 loại cơ cấu phá hoại độc lập tuyến tính. Tổ hợp của các cơ cấu phá hoại này tạo thành *cơ cấu phá hoại hỗn hợp*. Chẳng hạn trong các cơ cấu phá hoại (4.2b) và (4.2f), ta nhận thấy các góc xoay ở lân cận nút B ngược chiều nhau nhưng có giá trị tuyệt đối bằng nhau, các góc xoay ở lân cận nút D cùng chiều và có giá trị tuyệt đối bằng nhau.



Hình 4.2

Vì vậy, sự tổ hợp của hai cơ cấu phá hoại này tạo thành cơ cấu phá hoại hỗn hợp (hình 4.2g). Phân tích một cách tương tự, sự tổ hợp của 2 cơ cấu phá hoại (hình 4.2d) và (hình (4.2e) tạo thành cơ cấu phá hoại hỗn hợp (4.2h).

Cần chú ý rằng khi M_d (dầm) = M_d (cột), khớp dẻo sẽ hình thành ngay tại nút. Do đó, cơ cấu phá hoại (4.2b) trùng với cơ cấu phá hoại (4.2d), cơ cấu phá hoại (4.2e) trùng với cơ cấu phá hoại (4.2f), cơ cấu phá hoại (4.2g) trùng với cơ cấu phá hoại (4.2h).

Như trên đã trình bày, theo giả thuyết cứng dẻo, ta bỏ qua các biến dạng đàn hồi do đó khi một cơ cấu phá hoại hình thành, khung được xem như cấu tạo bởi các đoạn thẳng. Điều này cho phép thiết lập dễ dàng quan hệ giữa các góc xoay.

§2.3. Bài toán tối ưu xác định hệ số tải trọng

Gọi $\{P_1\ P_2 ..\ P_n\}$ là vectơ tải trọng và λ là hệ số tải trọng. Tập hợp các tải trọng cùng tăng theo một tỉ lệ như nhau được biểu thị bởi vectơ λ. $\{P_1\ P_2 ... P_m\}$.

Mục đích của bài toán tối ưu là tìm giá trị bé nhất của λ sao cho ứng với giá trị λ đó, một cơ cấu phá hoại hình thành.

Có hai cách giải bài toán tối ưu:

1. Cách giải thứ nhất*:

Trong cách giải này, ta tiến hành các bước sau:

- Dự kiến mọi cơ cấu phá hoại của khung (xem §2.2).

- Lập phương trình công khả dĩ cho mỗi cơ cấu phá hoại.

- Vì đã cho trước đặc trưng hình học của các phần tử (tức là đã cho trước giá trị các mômen dẻo), từ các phương trình công khả dĩ ứng với các cơ cấu phá hoại khác nhau, ta có thể xác định được các giá trị λ khác nhau.

- So sánh các giá trị λ và chọn ra giá trị bé nhất.

Cách giải trên có thể áp dụng cho những khung đơn giản. Đối với những khung phức tạp, nên dùng cách giải thứ hai.

2. Cách giải thứ hai.

- Từ hệ siêu tĩnh đã cho, chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực và thay thế các liên kết thừa bằng các lực chưa biết $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

- Dự kiến mọi tiết diện tới hạn (xem §2.2).

- Lập vectơ nội lực tại các tiết diện tới hạn. Giả sử khung có bậc siêu tĩnh bằng n và p tiết diện tới hạn. Vectơ nội lực tại các tiết diện tới hạn có thể biểu thị bằng hệ thức ma trận:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}.\,\mathbf{Q} \tag{4.4}$$

Trong đó:

$$\mathbf{S} = \{M_1\ M_2 \ldots M_i \ldots M_p\} \tag{4.5}$$

M_i là mômen tại tiết diện tới hạn thứ i

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,n+1} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{i,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{p,n+1} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Ma trận **B** là ma trận ảnh hưởng nội lực.

$$Q = \{\lambda\ R_1\ R_2\ R_n\} \tag{4.7}$$

Trong đó: λ là hệ số tải trọng; $R_1, R_2, \ldots R_n$ là các lực liên kết thừa.

- Thành lập các điều kiện ràng buộc về chảy dẻo.

* Có thể chứng minh được rằng cách giải thứ nhất và cách giải thứ hai thuộc hai loại bài toán đối ngẫu nhau.

Giá trị mômen tại mỗi tiết diện tới hạn bất kì i không được vượt quá giá trị mômen dẻo tương ứng M_i^o. Vì mômen có thể mang dấu dương hoặc âm nên điều kiện ràng buộc về chảy dẻo biểu thị như sau:

$$-M_i^o \le M_i \le M_i^o \tag{4.8}$$

Bất đẳng thức trên đây có thể viết thành 2 bất đẳng thức riêng biệt:

$$\begin{aligned} -M_i^o &\le M_i \\ M_i &\le M_i^o \end{aligned} \tag{4.8a}$$

Căn cứ vào hệ thức ma trận (4.4) và hệ bất đẳng thức (4.8a), ta có điều kiện ràng buộc về chảy dẻo

$$\mathbf{B^*.\,Q \le M^*} \tag{4.9}$$

Trong đó:

$$\mathbf{B^*} = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1,n+1} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{i1} & -b_{i2} & \dots & -b_{i,n+1} \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{p1} & -b_{p2} & \dots & -b_{p,n+1} \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{p,n+1} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Ma trận **B*** gồm 2p hàng vì ứng với mỗi tiết diện tới hạn thứ i (i = 1, 2,... p), ta có hai điều kiện ràng buộc (4.8a).

M* là vectơ mômen dẻo:

$$\mathbf{M^*} = \left\{ M_1^o\ M_1^o\ M_2^o\ M_2^o\ \dots\ M_i^o\ M_i^o\ \dots\ M_p^o\ M_p^o \right\} \tag{4.11}$$

Vectơ mômen **M*** gồm 2p hàng vì lí do như trên.

- Thành lập hàm mục tiêu.

Vì mục đích của bài toán tối ưu là tìm giá trí bé nhất* của hệ số tải trọng λ nên hàm mục tiêu có dạng:

$$Z = \lambda + 0.R_1 + 0.R_2 + \dots + 0.R_n \tag{4.12}$$

Nói tóm lại, bài toán tối ưu xác định hệ số tải trọng λ có dạng như sau:

Cực tiểu hóa hàm:

$$Z = \lambda + 0.R_1 + 0.R_2 + \dots + 0.R_n$$

Với điều kiện:

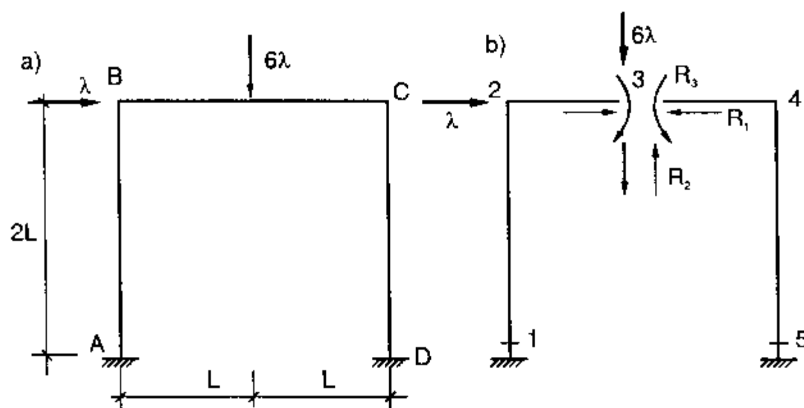
$$\mathbf{B^*.\,Q \le M^*} \tag{4.13}$$

$\lambda > 0$; $R_1, R_2, \ldots R_n$ - biến tự do.

Bài toán (4.13) là bài toán quy hoạch tuyến tính. Nhưng vì $R_1, R_2, \ldots R_n$ là các biến tự do (có thể âm hoặc dương) nên không thể giải trực tiếp bài toán đó bằng phương pháp đơn hình. Định lí đối ngẫu trình bày trong §3.6 (chương một) sẽ giúp ta giải bài toán đó.

***Thí dụ 4*:**

Cho một khung với tải trọng và kích thước biểu thị như trên hình (4.3). Diện tích tiết diện của các phần tử như nhau. Xác định hệ số tải trọng λ.



Hình 4.3

Giải

Theo đầu đề của bài toán, vectơ tải trọng là $\lambda\,\{P_1\ \ P_2\} = \lambda\,\{1\ \ 6\}$. Ta sẽ dùng cách giải thứ hai để giải bài toán tối ưu.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh n = 3 nên hệ cơ bản biểu thị như trên hình (4.3b). Các lực liên kết thừa là $R_1, R_2\ R_3$.

Mục đích của bài toán là tìm giá trị bé nhất của hệ số tải trọng λ sao cho ứng với giá trị đó, một cơ cấu phá hoại hình thành. Để giải bài toán này, ta sẽ lần lượt thành lập bài toán gốc và bài toán đối ngẫu (xem §3.6 chương một).

1. Bài toán gốc.

Trên hình (4.3b) các tiết diện 1, 2, 3, 4, 5 có khả năng là những tiết diện tới hạn.

Căn cứ vào các phương trình cân bằng thành lập cho hệ cơ bản trên hình (4.3b), ta suy ra hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -8L & 2L & 1 & 1 \\ -6L & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -L & 1 \\ 0 & 2L & -L & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} . \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \ \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \qquad (4.14)$$

Căn cứ vào hệ thức (4.9) và hệ thức ma trận (4.14), ta có điều kiện ràng buộc về chảy dẻo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8L & -2L & -1 & -1 \\ -8L & 2L & 1 & 1 \\ 6L & 0 & -1 & -1 \\ -6L & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L & -1 \\ 0 & 0 & -L & 1 \\ 0 & -2L & L & -1 \\ 0 & 2L & -L & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B^*}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \le \underbrace{\begin{bmatrix} M_d \\ M_d \\ M_d \\ M_d \\ M_d \\ M_d \\ M_d \\ M_d \\ M_d \\ M_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{M^*}} \qquad (4.15)$$

Trong đó: M_d là mômen dẻo ứng với dầm cũng như cột. Có 5 tiết diện tới hạn, ứng với mỗi tiết diện tới hạn, có 2 điều kiện ràng buộc dạng (4.8a) nên có tất cả 10 điều kiện ràng buộc về chảy dẻo.

Thực ra, trong 2 điều kiện ràng buộc ứng với mỗi tiết diện tới hạn, chỉ có một điều kiện là có hiệu lực. Nói một cách khác, điều kiện ràng buộc thứ nhất có hiệu lực khi momen M_i mang dấu âm; điều kiện ràng buộc thứ hai có hiệu lực khi mômen M_i mang dấu dương.

Căn cứ vào phương trình (4.12), ta có hàm mục tiêu:

$$Z = 1.\lambda + 0.R_1 + 0.R_2 + 0.R_3 \qquad (4.16)$$

Kết hợp phương trình (4.16) với bất đẳng thức ma trận (4.15) và thay $L = 1$, $\lambda = x_1$, $R_1 = x_2$, $R_2 = x_3$, $R_3 = x_4$, $M_d = b$, ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hóa: $Z = 1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

Với điều kiện

$$\left.\begin{array}{ll} 8x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 1x_4 & \le b \\ -8x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 & \le b \\ 6x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 1x_4 & \le b \\ -6x_1 - 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 & \le b \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 & \le b \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 & \le b \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 1x_4 & \le b \\ 0x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 1x_4 & \le b \\ 0x_1 - 2x_2 + 1x_3 - 1x_4 & \le b \\ 0x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 & \le b \end{array}\right\} \qquad (4.17)$$

Ta chú ý rằng trong bài toán trên có 3 biến tự do x_2, x_3, x_4 nghĩa là các biến này có thể âm hoặc dương. Do đó, không thể giải trực tiếp bài toán này bằng phương pháp đơn hình. Việc thành lập bài toán đối ngẫu sẽ tạo ra những điều kiện thuận lợi để giải bài toán đó.

2. Bài toán đối ngẫu.

Căn cứ vào nội dung trình bày trong §3.6 chương một và bài toán gốc (4.17), ta thành lập bài toán đối ngẫu như sau.

Vì bài toán gốc có 10 bất phương trình mang dấu bất đẳng thức ≤ nên bài toán đối ngẫu bao gồm 10 biến không âm. Ta kí hiệu các biến này là $y_1, y_2, \dots y_{10}$. Số biến trong bài toán gốc là 4 nên số đẳng thức trong bài toán đối ngẫu cũng là 4.

Vậy bài toán đối ngẫu có dạng:

Cực đại hóa hàm

$$Z^* = by_1 + by_2 + by_3 + by_4 + by_5 + by_6 + by_7 + by_8 + by_9 + by_{10} \quad \text{(a)}$$

Với điều kiện:

$$\left.\begin{array}{l} 8y_1 - 8y_2 + 6y_3 - 6y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + 0y_8 + 0y_9 + 0y_{10} = 1 \\ -2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + 0y_8 - 2y_9 + 2y_{10} = 0 \\ -1y_1 + 1y_2 - 1y_3 + 1y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 1y_7 - 1y_8 + 1y_9 - 1y_{10} = 0 \\ -1y_1 + 1y_2 - 1y_3 + 1y_4 - 1y_5 + 1y_6 - 1y_7 + 1y_8 - 1y_9 + 1y_{10} = 0 \end{array}\right\} \text{(b)}$$

$$y_1, y_2, \dots, y_{10} \geq 0 \qquad (4.18)$$

Bài toán trên có thể giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình. Đưa vào vế trái của các điều kiện ràng buộc (4.18) 4 biến giả tạo u_1, u_2, u_3, u_4, ta có bài toán tối ưu:

Cực đại hóa hàm

$$Z^* = by_1 + by_2 + by_3 + by_4 + by_5 + by_6 + by_7 + by_8 + by_9 + by_{10} \quad \text{(a)}$$

với điều kiện

$$\left.\begin{array}{l} 8y_1 - 8y_2 + 6y_3 - 6y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + 0y_8 + 0y_9 + 0y_{10} + u_1 = 1 \\ -2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + 0y_8 - 2y_9 + 2y_{10} + u_2 = 1 \\ -1y_1 + 1y_2 - 1y_3 + 1y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 1y_7 - 1y_8 + 1y_9 - 1y_{10} + u_3 = 0 \\ -1y_1 + 1y_2 - 1y_3 + 1y_4 - 1y_5 + 1y_6 - 1y_7 + 1y_8 - 1y_9 + 1y_{10} + u_4 = 0 \end{array}\right\} \text{(b)}$$

$$y_1, y_2, \dots y_{10} \geq 0 \qquad (4.19)$$

Công việc đầu tiên trong quá trình thành lập các bảng đơn hình là khử các biến giả tạo u_1, u_2, u_3, u_4 (xem §3.2 chương một). Để làm công việc này một cách nhanh chóng, ta lập một hàm phụ F và tiến hành cực tiểu hóa hàm đó. Hàm F có dạng:

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

Từ hệ phương trình (4.19b), ta suy ra:

$$F = 1 - 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 + 4y_4 + 1y_5 - 1y_6 + 0y_7 + 2y_9 - 2y_{10} \qquad (4.20)$$

Hệ phương trình (4.18b) được thỏa mãn với điều kiện các biến giả tạo u_1, u_2, u_3, u_4 đồng thời triệt tiêu, nghĩa là hàm phụ F phải triệt tiêu.

Vì vậy, trong quá trình thành lập các bảng đơn hình, phải tiến hành 2 nhiệm vụ song song:

a. Cực tiểu hóa hàm F' = -F (hàm 4.20)

b. Cực đại hóa hàm Z* = -Z (hàm 4.19a).

Nhiệm vụ thứ nhất xem như hoàn thành khi các số 0 đồng thời xuất hiện trong hàng của bảng đơn hình ứng với hàm F'. Lúc này, ta có F = 0.

Ta tiến hành thành lập các bảng đơn hình như sau (bảng 4.1):

Bảng 4.1

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}		
8	-8	6	-6	0	0	0	0	0	0	1	u_1
-2	2	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	u_2
-1	1	-1	1	0	0	1	-1	1	-1	0	u_3
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	u_4
4	-4	4	-4	-1	1	0	0	-2	2	1	-F'
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	0	-Z*
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}		
4/3	-4/3	1/6	-1	0	0	0	0	0	0	1/6	y_3
-1	1		0	0	0	0	0	-1	1	0	u_2
1/3	-1/3		0	0	0	1	-1	1	-1	1/6	u_3
1/3	-1/3		0	-1	1	-1	1	-1	1	1/6	u_4
-1/3	1/3		0	-1	1	0	0	-1	1	1/3	-F'
b/3	-7b/3		-2b	-b	-b	-b	-b	-b	-b	b/6	-Z*
y_1	y_2		y_4	y_5	u_4	y_7	y_8	y_9	y_{10}		
4/3	-4/3		-1	0		0	0	0	0	1/6	y_3
-1	1		0	0		0	0	-1	1	0	u_2
1/3	-1/3		0	0		1	-1	1	-1	1/6	u_3
1/3	-1/3		0	-1	1	-1	1	-1	1	1/6	y_6
-2/3	2/3		0	0		1	-1	0	0	1/6	-F'
2b/3	-8b/3		-2b	-2b		-2b	0	-2b	0	b/3	-Z*

y_1	y_2		y_4	y_5		u_3	y_8	y_9	y_{10}		
4/3	-4/3		-1	0			0	0	0	1/6	y_3
-1	1		0	0			0	-1	1	0	u_2
1/3	-1/3		0	0		1	-1	1	-1	1/6	y_7
2/3	-1		0	-1			0	0	0	1/3	y_6
-1	1		0	0			0	-1	1	0	-F'
4b/3	-10b/3		-2b	-2b			-2b	0	-2b	2b/3	-Z*

y_1	y_2		y_4	y_5			y_8	y_9	u_2		
4/3	-4/3		-1	0			0	0		1/6	y_3
-1	1		0	0			0	-1	1	0	y_{10}
-2/3	2/3		0	0			-1	0		1/6	y_7
2/3	-1		0	-1			0	0		1/3	y_6
0	0		0	0			0	0		0	-F'
-2b/3	-4b/3		-2b	-2b			-2b	-2b		2b/3	-Z*

Ta nhận thấy trong bảng đơn hình cuối cùng, toàn bộ các số 0 đồng thời xuất hiện trên hàng ứng với -F' có nghĩa là hàm phụ F = 0, toàn bộ các biến giả tạo u_1, u_2, u_4, u_5 đồng thời triệt tiêu. Đồng thời, trên hàng cuối cùng ứng với hàm -Z*, toàn bộ các số âm đồng thời xuất hiện (trừ số hạng tự do), chứng tỏ hàm Z* đạt giá trị cực đại:

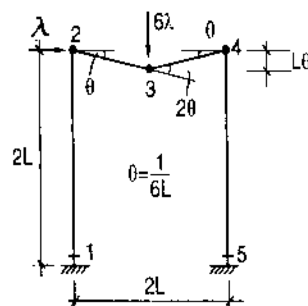
$$\max Z^* = -2b/3$$

Căn cứ vào định lí đối ngẫu, ta suy ra giá trị cực tiểu của hàm mục tiêu trong bài toán gốc là:

$$\min Z = \min x_1 = \min \lambda = -(-2b/3) = 2b/3$$

Thay $x_1 = \lambda$, $b = M_d$, ta có giá trị cực tiểu của hệ số tải trọng

$$\min \lambda = 2M_d/3$$



Hình 4.4

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 1/6,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0,\ y_6 = 1/3,\ y_7 = 1/6,\ y_8 = 0,\ y_9 = 0,\ y_{10} = 0 \quad (4.21)$$

Có thể chứng minh được rằng các biến $y_1, y_2 \ldots y_9, y_{10}$ trong bài toán đối ngẫu là những đại lượng biểu thị góc xoay của các khớp dẻo hình thành trong cơ cấu phá hoại của khung trên hình (4.3a). Cặp (y_1, y_2) ứng với tiết diện tới hạn thứ nhất, cặp (y_3, y_4) ứng với tiết diện tới hạn thứ 2, cặp (y_5, y_6) ứng với tiết diện tới hạn thứ 3, cặp (y_7, y_8) ứng với tiết diện tới hạn thứ 4, cặp (y_9, y_{10}) ứng với tiết diện tới hạn thứ 5. Trong mỗi cặp góc xoay (y_{2n+1}, y_{2n+2}), n = 0, 1, 2, 3, 4, chỉ có một góc xoay là có ý nghĩa vì mỗi khớp dẻo trong cơ cấu phá hoại chỉ có một góc xoay mà thôi (góc xoay này có thể âm hoặc dương).

Căn cứ vào phương án tối ưu (4.21) của bài toán đối ngẫu, ta suy ra cơ cấu phá hoại của khung (hình 4.4). Đây là cơ cấu phá hoại dầm, một cơ cấu phá hoại có tính chất cục bộ.

Để kiểm tra giá trị λ vừa tính ở trên, ta thành lập phương trình công khả dĩ cho cơ cấu phá hoại trên hình (4.4):

$$6\lambda.L.\theta = M_d.\theta + M_d.2\theta + M_d.\theta = 4M_d.\theta.$$

Vậy

$$\min\lambda = \frac{4M_d}{6L} = \frac{2M_d}{3L}$$

Thay $$L = 1 \Rightarrow \min\lambda = \frac{2M_d}{3}$$

Kết quả này có thể xem như được suy ra từ cách giải thứ nhất. Nó hoàn toàn phù hợ với kết quả tính được từ cách giải thứ hai.

§3. BÀI TOÁN TỐI ƯU XÁC ĐỊNH TRỌNG LƯỢNG BÉ NHẤT CỦA KẾT CẤU

Mục đích của bài toán là xác định các tiết diện tối ưu của kết cấu sao cho nó có trọng lượng bé nhất.

Như trong phần trước đã trình bày, giữa mômen dẻo M_d và mômen chống uốn W_d có mối liên hệ theo công thức (4.1). Nếu chọn M_d làm biến, khi giá trị M_d được xác định, ta có thể dễ dàng suy ra giá trị W_d từ đó suy ra kích thước tối ưu của tiết diện.

Trước khi thành lập bài toán tối ưu, ta hãy nghiên cứu mối liên hệ giữa M_d và trọng lượng kết cấu. Như trong §2.1 đã trình bày, giữa trọng lượng trên đơn vị dài q_i và mômen dẻo M_{di} của phần tử i, có mối liên hệ theo công thức (4.3). Do đó, hàm trọng lượng của kết cấu có thể viết:

$$T = \sum q_i L_i = \sum (c + dM_{di}).L_i \quad \text{hay}$$

$$T = c\sum L_i + d\sum M_{di}.L_i$$

Vì c, d, $\sum L_i$ là những hằng số nên ta có trọng lượng kết cấu bé nhất khi đại lượng $\sum M_{di}.L_i$ bé nhất. Nói một cách khác, hàm mục tiêu mà ta cần cực tiểu hóa là

$$Z = \sum_{i=1}^{s} M_{di}.L_i \qquad (4.22)$$

Trong đó: s là số phần tử trong kết cấu.

Có 2 cách giải bài toán tối ưu xác định trọng lượng bé nhất của kết cấu như sau:

§3.1. Cách giải thứ nhất

Cách giải thứ nhất tiến hành theo các bước sau đây:

1) Dự kiến mọi cơ cấu phá hoại của khung (xem §2.2).

2) Lập phương trình công khả dĩ cho mỗi cơ cấu phá hoại. Tập hợp các phương trình công khả dĩ và xem chúng là những điều kiện ràng buộc của bài toán tối ưu.

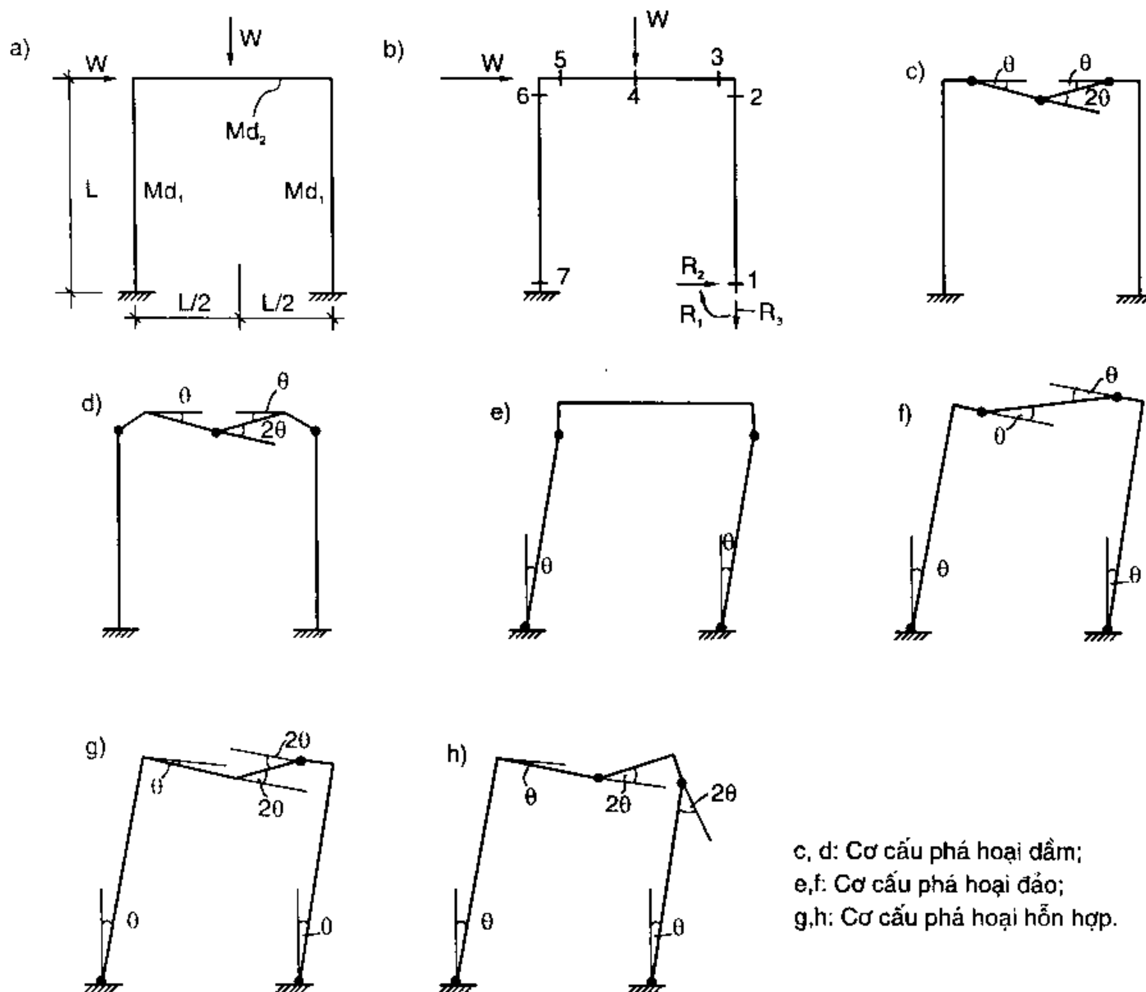
3) Lập hàm mục tiêu (4.22) và tiến hành cực tiểu hóa hàm đó.

4) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính trên theo phương pháp đơn hình để tìm giá trị tối ưu của mômen dẻo M_d.

Cách giải này có thể áp dụng cho loại khung đơn giản.

Thí dụ 4.2

Cho một khung với tải trọng, kích thước biểu thị như trên hình (4.5a). Các cột nhóm thuộc tiết diện ứng với mômen dẻo M_{d1}, xà thuộc nhóm tiết diện ứng với mômen dẻo M_{d2}. Tìm giá trị tối ưu của M_d sao cho khung có trọng lượng bé nhất.



Hình 4.5

Giải

1) Các cơ cấu phá hoại biểu thị trên các hình (4.5c), (4.5d), (4.5e), (4.5f), (4.5g), (4.5h).

2) Lập phương trình công khả dĩ cho mỗi cơ cấu phá hoại:

Cơ cấu phá hoại (4.5c):

$$W\frac{L}{2}.\theta = 4M_{d2}.\theta$$

Cơ cấu phá hoại (4.5d): $W\frac{L}{2}.\theta = 2M_{d1}.\theta + 2M_{d2}.\theta$

Cơ cấu phá hoại (4.5e): $W.L.\theta = 4M_{d1}.\theta$

Cơ cấu phá hoại (4.5f): $W.L.\theta = 2M_{d1}.\theta + 2M_{d2}.\theta$

Cơ cấu phá hoại (4.5g): $W\frac{L}{2}.\theta + W.L.\theta = 2M_{d1}.\theta + 4M_{d2}.\theta$

Cơ cấu phá hoại (4.5h): $W\frac{L}{2}.\theta + W.L.\theta = 4M_{d1}.\theta + 4M_{d2}.\theta$

Để đảm bảo cho khung làm việc an toàn, các giá trị mômen dẻo M_{d1}, M_{d2} phải thoả mãn các điều kiện ràng buộc:

$$\frac{M_{d2}}{W.L} \geq \frac{1}{8}$$

$$\frac{M_{d1}}{W.L} + \frac{M_{d2}}{W.L} \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{M_{d1}}{W.L} \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{M_{d1}}{W.L} + \frac{M_{d2}}{W.L} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{2M_{d1}}{W.L} + \frac{4M_{d2}}{W.L} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{4M_{d1}}{W.L} + \frac{2M_{d2}}{W.L} \geq \frac{3}{2}$$

3) Lập hàm mục tiêu theo công thức (4.22)

$$Z = \sum_{i=1}^{2} L_i M_{di} = 2L.M_{d1} + L.M_{d2}$$

Chia 2 vế của phương trình trên cho WL^2 và đặt $Z' = Z/WL^2$, ta có:

$$Z' = 2\frac{M_{d1}}{WL} + \frac{M_{d2}}{WL}$$

4) Kết hợp hàm mục tiêu với các điều kiện ràng buộc trên và đặt $M_{d1}/WL = x_1$, $M_{d2}/WL = x_2$ ta có bài toán tối ưu:

Cực tiểu hoá hàm:

$$
\left.
\begin{array}{llr}
 & Z' = 2x_1 + x_2 & \text{(a)} \\
\text{Với điều kiện:} & & \\
 & x_2 \geq 1/8 & \text{(b)} \\
 & x_1 + x_2 \geq 1/4 & \text{(c)} \\
 & x_1 \geq 1/4 & \text{(d)} \\
 & x_1 + x_2 \geq 1/2 & \text{(e)} \\
 & 2x_1 + 4x_2 \geq 3/2 & \text{(f)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 \geq 3/2 & \text{(g)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
\right\} \quad (4.23)
$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính trên gồm 2 biến nên có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

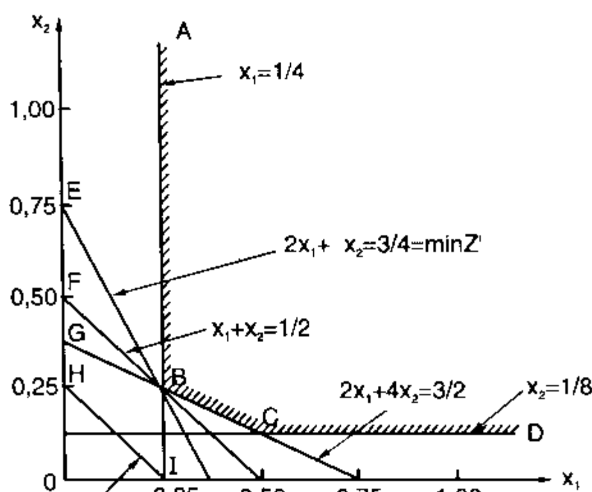
Trên hình (4.6), miền gạch chéo biểu thị miền nghiệm. Đường mức min Z' = 3/4 đi qua nút B của đường biên. Tại đây, ta được phương án tối ưu:

$x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/4$ ứng với min Z' = 3/4.

Thay $x_1 = M_{d1}/WL$, $x_2 = M_{d2}/WL$ và $Z' = Z/WL^2$, ta có phương án tối ưu:

$M_{d1} = WL/4$

$M_{d2} = WL/4$ ứng với min $Z = (3/4)WL^2$.



Hình 4.6

§3.2. Cách giải thứ hai

Cách giải này có thể áp dụng cho loại khung phức tạp. Tiến hành tính toán theo các bước sau đây:

1) Chọn hệ cơ bản cho hệ siêu tĩnh theo phương pháp lực và thay các liên kết thừa bằng các lực R_1, R_2,... R_n.

2) Dự kiến mọi tiết diện tới hạn (xem §2.2).

3) Lập vectơ nội lực tại các tiết diện tới hạn theo công thức (4.4).

4) Lập các điều kiện ràng buộc về chảy dẻo theo hệ thức (4.9).

5) Lập hàm mục tiêu theo công thức (4.22).

6) Giải bài toán tối ưu theo phương pháp đơn hình.

Thí dụ 4.3

Đầu đề giống thí dụ (4.2).

Giải

1) Chọn hệ cơ bản như trên (hình 4.5b). Các lực liên kết thừa là R_1, R_2. R_3.

2) Vì giá trị mômen dẻo chưa biết nên 7 tiết diện tới hạn biểu thị như trên hình (4.5b).

3) Căn cứ vào các phương trình cân bằng, lập vectơ nội lực tại các tiết diện tới hạn:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{bmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 \\ 0 & 1 & -L & L/2 \\ L/2 & 1 & -L & L \\ L/2 & 1 & -L & L \\ 3L/2 & 1 & 0 & L \end{bmatrix}}_{B} . \underbrace{\begin{bmatrix} W \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}}_{Q}$$

4) Lập các điều kiện ràng buộc về chảy dẻo. Các cột thuộc nhóm mômen dẻo M_{d1} và xà thuộc nhóm mômen dẻo M_{d2} nên mômen dẻo ứng với các tiết diện tới hạn 1, 2, 6, 7 là M_{d1}, mômen dẻo ứng với các tiết diện tới hạn 3, 4, 5 là M_{d2}.

Áp dụng hệ thức ma trạn (4.9), ta có điều kiện ràng buộc về chảy dẻo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +L & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 \\ 0 & -1 & +L & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 \\ 0 & -1 & +L & -L/2 \\ 0 & 1 & -L & +L/2 \\ -L/2 & -1 & +L & -L \\ L/2 & 1 & -L & +L \\ -L/2 & -1 & +L & -L \\ L/2 & 1 & -L & +L \\ -3L/2 & -1 & 0 & -L \\ 3L/2 & 1 & 0 & +L \end{bmatrix}}_{B^*} . \underbrace{\begin{bmatrix} W \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}}_{Q} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} M_{d1} \\ M_{d1} \\ M_{d1} \\ M_{d1} \\ M_{d2} \\ M_{d2} \\ M_{d2} \\ M_{d2} \\ M_{d2} \\ M_{d2} \\ M_{d1} \\ M_{d1} \\ M_{d1} \\ M_{d1} \end{bmatrix}}_{M^*}$$

Khai triển bất đẳng thức ma trận trên và đặt $M_{d1} = x_1$, $M_{d2} = x_2$, $R_1 = x_3$, $R_2 = x_4$, $R_3 = x_5$, ta có các điều kiện ràng buộc về chảy dẻo:

$$\left.\begin{array}{ll}
-x_1 + 0.x_2 - 1.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 & \leq 0 \\
-x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 & \leq 0 \\
-x_1 + 0.x_2 - 1x_3 + L.x_4 + 0.x_5 & \leq 0 \\
-x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 - L.x_4 + 0.x_5 & \leq 0 \\
0.x_1 - 1.x_2 - 1.x_3 + L.x_4 + 0.x_5 & \leq 0 \\
0.x_1 - 1.x_2 + 1x_3 - L.x_4 + 0x_5 & \leq 0 \\
0.x_1 - 1x_2 - 1x_3 + L.x_4 - \frac{L}{2}.x_5 & \leq 0 \\
0.x_1 - 1.x_2 + 1.x_3 - L.x_4 + \frac{L}{2}.x_5 & \leq 0 \\
0.x_1 - 1.x_2 - 1.x_3 + L.x_4 - L.x_5 & \leq WL/2 \\
0.x_1 - 1.x_2 + 1.x_3 - L.x_4 + L.x_5 & \leq -WL/2 \\
-1.x_1 + 0.x_2 - 1x_3 + L.x_4 - L.x_5 & \leq WL/2 \\
-1.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 - L.x_4 + L.x_5 & \leq -WL/2 \\
-1x_1 + 0.x_2 - 1x_3 + 0.x_4 - Lx_5 & \leq 3WL/2 \\
-x_1 + 0.x_2 + 1x_3 + 0x_4 + L.x_5 & \leq -3WL/2 \\
x_1, x_2 \geq 0, & x_3, x_4, x_5 \text{ tự do.}
\end{array}\right\} \quad (4.24)$$

5) Lập hàm mục tiêu theo công thức (4.22):

$$Z = 2L.x_1 + L.x_2 \quad (4.25)$$

6) Giải bài toán tối ưu: cực tiểu hóa hàm mục tiêu (4.25) thỏa mãn các điều kiện (4.24). Ta nhận thấy bài toán trên gồm 3 biến tự do x_3, x_4, x_5 nên không thể giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình. Để có thể giải bằng phương pháp đơn hình, cần đưa vào các biến mới như sau:

Lần lượt thay các biến tự do x_3, x_4, x_5 bằng các hệ thức:

$$x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}$$

$$x_4 = x_4^{'} - x_4^{''}$$

$$x_5 = x_5^{'} - x_5^{''}$$

$$x_3^{'},\ x_3^{''},\ x_4^{'},\ x_4^{''},\ x_5^{'},\ x_5^{''} \geq 0$$

Thay x_3, x_4, x_5 từ các hệ thức trên vào các điều kiện ràng buộc (4.24), ta có bài toán quy hoạch tuyến tính:

Cực tiểu hóa hàm

$$Z = 2Lx_1 + L.x_2$$

Với điều kiện

$$-x_1 - x_3^{'} + x_3^{''} \leq 0$$

$$-x_1 + x_3^{'} - x_3^{''} \leq 0$$

$$-x_1 - x_3^{'} + x_3^{''} + L.x_4^{'} - Lx_4^{''} \leq 0$$

$$-x_1 + x_3^{'} - x_3^{''} - Lx_4^{'} + Lx_4^{''} \leq 0$$

$$-x_2 - x_3' + x_3'' + L.x_4' - Lx_4'' \le 0$$

$$-x_2 + x_3' - x_3'' - Lx_4' + Lx_4'' \le 0$$

$$-x_2 - x_3' + x_3'' + Lx_4' - L.x_4'' - L/2.x_5' - L/2.x_5'' \le 0$$

$$-x_2 + x_3' - x_3'' - L.x_4' + L.x_4'' + L/2.x_5' - L/2.x_5'' \le 0$$

$$-x_2 - x_3' + x_3'' + L.x_4' - L.x_4'' - L.x_5' + L.x_5'' \le WL/2$$

$$x_2 - x_3' + x_3'' + L.x_4' - Lx_4'' - Lx_5' + L.x_5'' \ge WL/2$$

$$-x_1 - x_3' + x_3'' + L.x_4' - L.x_4'' - L.x_5' + L.x_5'' \le WL/2$$

$$x_1 - x_3' + x_3'' + L.x_4' - Lx_4'' - Lx_5' + L.x_5'' \ge WL/2$$

$$-x_1 - x_3' + x_3'' - Lx_5' + L.x_5'' \le 3WL/2$$

$$x_1 - x_3' + x_3'' - Lx_5' + L.x_5'' \ge 3WL/2$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3',\ x_3'',\ x_4',\ x_4'',\ x_5',\ x_5'' \ge 0$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính trên gồm 8 biến chính thức trong đó có 2 biến cho các mômen dẻo và 6 biến cho các lực liên kết thừa. Ngoài ra, khi giải bằng phương pháp đơn hình, phải đưa vào 11 biến đệm cho các điều kiện ràng buộc mang dấu bất đẳng thức ≤, 3 biến dư và 3 biến giả tạo cho các điều kiện ràng buộc mang dấu ≥.

Đề nghị độc giả tự giải lấy bài toán trên theo phương pháp đơn hình và so sánh với kết quả trong thí dụ (4.2).

Từ 2 thí dụ trên, ta nhận thấy cách giải thứ 2 phức tạp hơn cách giải thứ nhất. Tuy nhiên, phải thấy rằng đối với những khung phức tạp, việc thống kê các cơ cấu phá hoại quả thật là một việc làm đầy khó khăn và phức tạp. Vì vậy, trong điều kiện sử dụng máy tính điện tử, cách giải thứ 2 rõ ràng là ưu việt hơn cách giải thứ nhất.

§4. PHƯƠNG PHÁP QUY HOẠCH ĐỘNG ÁP DỤNG CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TÍNH DẦM LIÊN TỤC

§4.1. Khái niệm

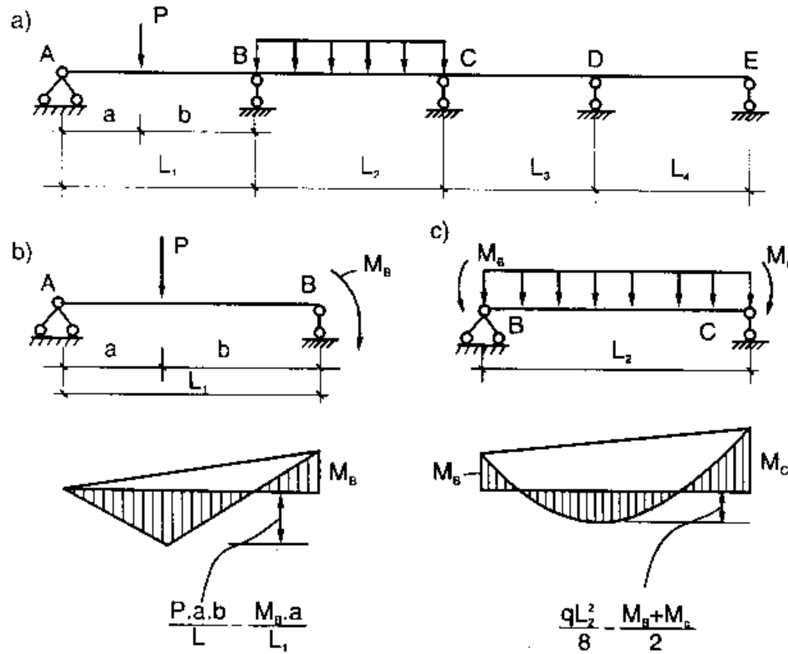
Dầm liên tục là loại kết cấu được cấu tạo bởi một hệ thống dầm nối tiếp nhau, do đó có thể áp dụng phương pháp quy hoạch động để giải bài toán tối ưu (xem §7 chương một).

Cũng như trong phần trước, mục đích của bài toán là xác định kích thước tiết diện tối ưu của các bộ phận dầm sao cho toàn bộ dầm liên tục có trọng lượng bé nhất.

Ta sẽ vận dụng các nguyên lí trình bày trong mục §7 (chương một) để giải bài toán tối ưu tính dầm liên tục.

Trước hết, từ dầm liên tục, ta tách ra các dầm đơn giản xếp theo thứ tự từ trái sang phải hoặc từ phải sang trái. Khác với dầm có gối tựa tự do, dầm đơn giản ở đây chịu tác dụng của một mômen (đối với dầm biên) hoặc 2 mômen (đối với dầm trung gian). Chẳng hạn dầm liên tục trên hình (4.7a) được chia thành 4 dầm đơn giản. Nếu xếp thứ tự từ trái sang phải, ta có các dầm đơn giản AB (hình 4.7b), dầm đơn giản BC (hình 4.7c), dầm đơn giản CD, DE. Dầm đơn giản AB chịu tác dụng của mômen M_B. Dầm đơn giản BC chịu tác dụng của 2 mômen M_B và M_C. Các dầm CD và DE cũng được phân tích một cách tương tự.

Ứng với mỗi dầm đơn giản, ta sẽ chọn một giá trị mômen dẻo tối ưu (tức là kích thước tiết diện tối ưu) sao cho toàn bộ dầm liên tục có trọng lượng bé nhất.



Hình 4.7

Do sự phân tích trên đây, mỗi dầm đơn giản có 2 hoặc 3 giá trị mômen chưa biết. Đối với dầm đơn giản ở biên, các mômen chưa biếtlà mômen ở gối tựa trung gian và mô men ở giữa nhịp. Đối với dầm đơn giản trung gian, các mômen chưa biết là 2 mômen ở 2 gối tựa trung gian và một mômen ở giữa nhịp. Để đảm bảo cho dầm làm việc an toàn, giá trị tuyệt đối của mômen dẻo phải chọn sao cho không được bé hơn giá trị tuyệt đối lớn nhất trong các giá trị tuyệt đối của các mômen nói trên. Chẳng hạn đối với dầm đơn giản AB (hình 4.7b), mômen dẻo phải thoả mãn điều kiện :

$$M_{d1} \geq \max\left\{|M_b|, \left|\frac{P.a.b}{L_1} - \frac{M_B.a}{L_1}\right|\right\} \tag{4.26}$$

Đối với dầm BC (hình 4.7c), mômen dẻo phải thỏa mãn điều kiện:

$$M_{d2} \geq \max\left\{|M_B|, \left|\frac{qL_2^2}{8} - \frac{M_B + M_C}{2}\right|, |M_C|\right\} \tag{4.27}$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta nhận thấy giá trị mômen dẻo phụ thuộc vào giá trị mômen ở 1 đầu (đối với dầm biên) hoặc phụ thuộc vào giá trị mômen ở 2 đầu (đối với dầm trung gian). Do đó, nếu cho trước một giá trị mômen ở các gối tựa, có thể xác định được giá trị mômen dẻo theo các hệ thức (4.26), (4.27).

Để giải bài toán tối ưu tính dầm liên tục theo phương pháp quy hoạch động, ta chọn ra trước một số tiết diện định hình. Ở đây, ta giả thiết kích thước tiết diện dầm là những đại lượng có tính chất rời rạc, không liên tục. Ứng với mỗi tiết diện định hình, ta có các số liệu:

1) Giá trị mômen dẻo.

2) Giá trị trọng lượng dầm trên một đơn vị dài.

Ta sẽ lần lượt cho các mômen ở các gối tựa biến thiên theo các giá trị mômen dẻo, các giá trị này ứng với các tiết diện định hình đã được chọn trước. Ta bắt đầu từ dầm ngoài cùng (ở bên phải hoặc bên trái) rồi phát triển dần đến dầm thứ 2, thứ 3... cho đến dầm cuối cùng của dầm liên tục.

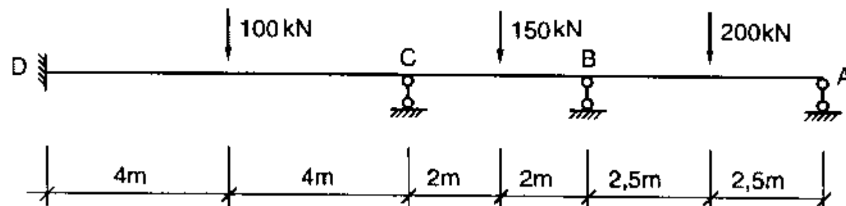
Trong mỗi giai đoạn tính toán, ta thống kê các giá trị mômen dẻo đã được chọn và giá trị trọng lượng dầm tương ứng. Bằng cách làm như vậy, cuối mỗi giai đoạn tính toán, ta được một phương án tối ưu cục bộ. Phương án tối ưu cục bộ ở giai đoạn này sẽ ảnh hưởng đến phương án tối ưu cục bộ ở giai đoạn sau. Đến giai đoạn cuối cùng, ta sẽ được phương án tối ưu toàn bộ. Phương án tối ưu này là kết quả tích lũy các phương án tối ưu cục bộ trong các giai đoạn trước.

Trong quá trình tính toán, ta lần lượt thành lập các bảng tương tự như bảng (1.16) trình bày trong §7.1 chương một.

§4.2. Thí dụ tính toán

Thí dụ 4.4.

Cho một dầm liên tục với tải trọng và kích thước biểu thị như trên hình (4.8). Chọn tiết diện tối ưu của dầm sao cho trọng lượng của toàn bộ dầm liên tục bé nhất.



Hình 4.8

Giải

Ta chia dầm liên tục thành 3 dầm đơn giản và bắt đầu tính từ dầm biên bên phải. Theo nguyên lí của phương pháp quy hoạch động, ta sẽ lần lượt chọn tiết diện tối ưu cho dầm AB, dầm ABC (dầm AB và BC ghép lại) và cuối cùng là toàn bộ dầm liên tục ABCD (dầm ABC và dầm CD ghép lại). Trước hết, ta chọn một số tiết diện với các số liệu tương ứng ghi trong bảng (4.2). Ta tiến hành tính toán theo các giai đoạn sau.

Bảng 4.2

Tiết diện số	1	2	3	4	5	6
Trọng lượng (kg/m)	32	36	40	42	45	55
M_d (kN.m)	100	130	155	175	190	257

Giai đoạn 1

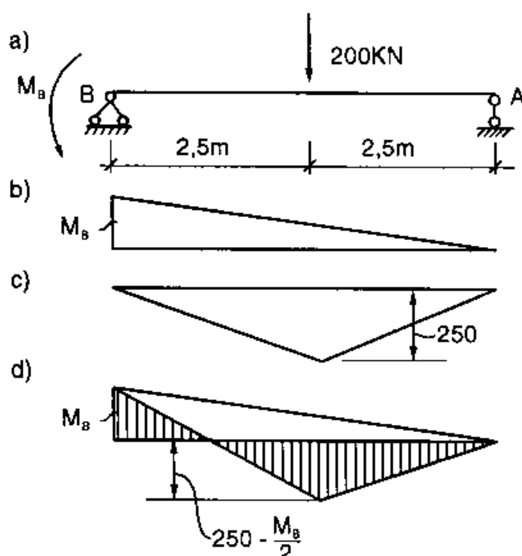
Ta bắt đầu tính từ dầm AB. Biểu đồ mômen của dầm AB biểu thị trên hình (4.9d) trong đó giá trị mômen M_B chưa biết. Ta sẽ căn cứ vào giá trị mômen M_B và giá trị mômen ở giữa nhịp (250 - M_B/ 2) để chọn giá trị mômen dẻo của dầm AB.

Theo (4.26) ta có:

$$M_{d1} \geq \max\{|M_B|, |250 - M_B/2|\} \qquad (4.28)$$

Ta lần lượt cho M_B biến thiên theo các giá trị trong hàng cuối cùng của bảng (4.2). Đầu tiên, giả sử gối tựa B tự do. Thay $M_B = 0$ vào bất đẳng thức (4.28), ta có:

$$M_{d1} \geq \max\{0, 250\} = 250$$



Hình 4.9

Căn cứ vào các giá trị trong hàng cuối cùng của bảng (4.2), ta chọn $M_{d1} = 257$ (tiết diện số 6).

Thay $M_B = 100$ vào bất đẳng thức (4.28), ta có:

$$M_{d1} \geq \max\{100, 200\} = 200$$

Căn cứ vào các giá trị trong hàng cuối cùng của bảng (4.2), ta chọn $M_{d1} = 257$ (tiết diện số 6).

Đối với các trường hợp $M_B = 130$, $M_B = 155$,... $M_B = 257$, ta cũng làm tương tự như trên.

Cần chú ý rằng, khi $M_B \leq 155$, giá trị tuyệt đối lớn nhất của các mômen xuất hiện ở giữa nhịp và khi $M_B > 155$, giá trị tuyệt đối lớn nhất của các mômen xuất hiện ở gối tựa.

Với mỗi giá trị mômen dẻo M_{d1} đã được chọn, ta suy ra từ bảng (4.2) tiết diện tương ứng và trọng lượng dầm tương ứng. Chẳng hạn, khi chọn $M_{d1} = 257$, tiết diện tương ứng là tiết diện số 6 còn trọng lượng dầm tính như sau:

$$\phi_1 = 55.5 = 275\text{kN}$$

Đối với các trường hợp khác, ta cũng làm tương tự như trên.

Bảng 4.3

M_B (kNm)	max $\lvert M_1 \rvert$ (kNm)	M_{d1} được chọn (kN)	Trọng lượng ϕ_1 (kN)
0	250	257	275
100	200	257	275
130	185	190	225
155	172,5	175	(210)
175	175	175	(210)
190	190	190	225
257	257	257	275

Các số liệu tính toán ghi trong bảng (4.3). Các giá trị nằm trong dấu ngoặc ứng với giá trị trọng lượng bé nhất của dầm AB. Chẳng hạn khi M_B = 155kNm hoặc khi M_B = 175JNm, trọng lượng tương ứng của dầm bằng 210kN và đây là trọng lượng bé nhất so với các trường hợp khác.

Giá trị M_{d1} = 155kNm hoặc giá trị M_{d1} = 175kNm được xem như phương án tối ưu cục bộ trong giai đoạn 1. Đến đây, ta kết thúc giai đoạn 1 và chuyển sang giai đoạn 2.

Giai đoạn 2

Trong giai đoạn 2, ta kết hợp 2 dầm AB và BC (hình 4.10a). Biểu đồ mômen của dầm ABC biểu thị trên hình (4.10b). Theo (4.27) và hình (4.10b), giá trị mômen dẻo của dầm BC phải thỏa mãn điều kiện:

$$M_{d2} \geq \max\left\{|M_B|, \left|150-(M_B+M_C)/2\right|, |M_C|\right\} \tag{4.29}$$

Ta sẽ lần lượt cho M_B và M_C biến thiên theo các giá trị trong hàng cuối cùng của bảng (4.2). Đầu tiên, giả sử gối tựa C tự do, cố định giá trị $M_C = 0$ và cho M_B biến thiên theo các giá trị nói trên. Chẳng hạn, khi $M_B = 0$, theo (4.29) ta có:

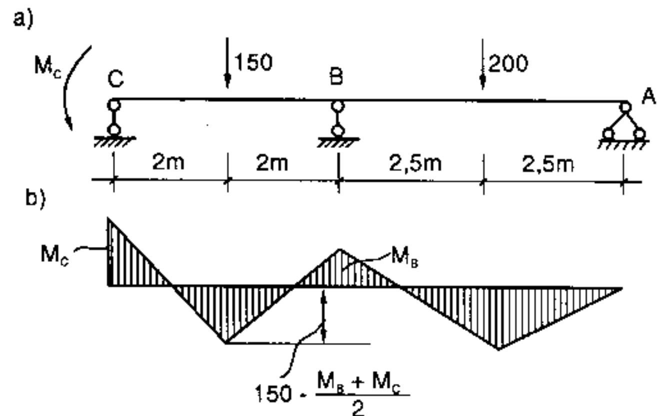
$$M_{d2} \geq \max\{0\ ,\ 150\ ,\ 0\} = 150$$

Căn cứ vào các số liệu trong hàng cuối cùng của bảng (4.2), ta chọn M_{d2} = 155. Tiết diện tương ứng là tiết diện số 3, trọng lượng tương ứng của dầm BC là:

$$f_2 = 40.\ 4 = 160 \text{ kN}$$

Nhưng khi $M_B = 0$, trọng lượng tương ứng của dầm AB là 275kN (xem bảng 4.3). Vậy khi $M_B = 0$, $M_C = 0$, tổng trọng lượng của hai dầm AB và BC là:

$$\phi_1 + f_2 = 160 + 275 = 435 \text{ kN}$$



Hình 4.10

Đối với các trường hợp M_B = 100, M_B = 130,... M_B = 257, ta cũng làm tương tự như trên. Các số liệu tính toán ứng với trường hợp $M_C = 0$ ghi trong bảng (4.4).

Giá trị nằm trong dấu ngoặc biểu thị trọng lượng bé nhất của dầm ABC. Căn cứ vào các số liệu trong bảng (4.2), (4.3), (4.4), ta nhận thấy nếu dầm liên tục chỉ có 2 nhịp với gối tựa C tự do ($M_C = 0$) thì phương án tối ưu sẽ là: M_{d1} = 190 kNm (suy ra từ bảng 4.3) ứng với tiết diện số 5; M_{d2} = 130 kNm (suy ra từ bảng 4.4) ứng với tiết diện số 2 (suy ra từ bảng 4.2); tổng trọng lượng bé nhất của dầm bằng 369 kNm (bảng 4.4).

Bảng 4.4 ($M_C = 0$)

M_B	max | M_2|	M_{d2} được chọn	Trọng lượng dầm AB	Trọng lượng dầm BC	Trọng lượng dầm AB+BC
			ϕ_1	f_2	$\phi_1 + f_2$
0	150	155	275	160	435
100	100	100	275	128	403
130	130	130	225	144	(369)
155	155	155	210	160	370
175	175	175	210	168	398
190	190	190	225	180	405

Bây giờ cố định M_C = 100 kNm và cho M_B biến thiên theo các giá trị trong hàng cuối cùng của bảng (4.2). Sau khi làm tương tự như trên, ta được các số liệu ghi trong bảng (4.5)

Bảng 4.5 ($M_c = 100$)

M_B	max | M_2|	M_{d2} được chọn	Trọng lượng dầm AB	Trọng lượng dầm BC	Trọng lượng dầm AB + BC
			ϕ_1	f_2	$\phi_1 + f_2$
0	100	100	275	128	403
100	100	100	275	128	403
130	130	130	225	144	(369)
155	155	155	210	160	370
175	175	175	210	168	398
190	190	190	225	180	405

Giá trị nằm trong dấu ngoặc biểu thị tổng trọng lượng bé nhất của dầm.

Cứ như vậy, ta tiếp tục thành lập các bảng tiếp theo cho các trường hợp M_C = 130, M_C = 155,...

Căn cứ vào các số liệu trong cột cuối cùng của các bảng trên, ta lập bảng thống kê tổng trọng lượng của dầm AB và BC ứng với các giá trị khác nhau của M_B và M_C (bảng 4.6).

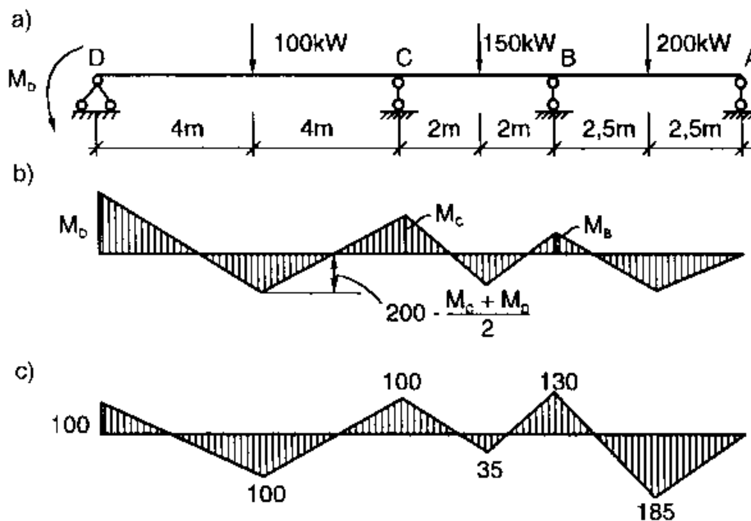
Hàng cuối cùng trong bảng (4.6) ghi các giá trị trọng lượng bé nhất của dầm ứng với các giá trị khác nhau của M_C. Các số liệu này sẽ phục vụ cho việc tính toán trong giai đoạn 3.

Bảng 4.6

$M_B = 0$	$M_C = 0$	$M_C = 100$	$M_C = 130$	$M_C = 155$	$M_C = 175$	$M_C = 190$
0	435	403	419	435	443	455
100	403	403	419	435	443	455
130	(369)	(369)	(369)	385	393	405
155	370	370	370	(370)	(378)	(390)
175	398	398	398	378	(378)	(390)
190	405	405	405	405	405	405
Min $(\phi_1 + f_2) = \phi_2$	369	369	369	370	378	390

Giai đoạn 3

Trong giai đoạn 3, ta ghép thêm dầm CD để tạo thành toàn bộ dầm liên tục (hình 4.11a). Biểu đồ mômen của dầm liên tục biểu thị trên hình (4.11b).



Hình 4.11

Căn cứ vào bất đẳng thức (4.27) và hình (4.1), ta có điều kiện:

$$M_{d3} \geq \max\left\{|M_C|\ ,\ |200-(M_C+M_D)/2|\ ,\ |M_D|\right\} \qquad (4.30)$$

Lần lượt cho M_C và M_D biến thiên theo các giá trị trong hàng cuối cùng của bảng (4.2). Đầu tiên, giả sử gối D tự do, cố định giá trị $M_D = 0$ và cho M_C biến thiên theo các giá trị nói trên. Chẳng hạn khi $M_C = 0$, từ bất đẳng thức (4.30), ta có:

$$M_{d3} \geq \{0\ ,\ 200\ ,\ 0\} = 200$$

Căn cứ vào các số liệu trong hàng cuối cùng của bảng (4.2), ta chọn $M_{d3} = 257$ và suy ra trọng lượng của dầm CD:

$$f_3 = 55.\ 8 = 440 \text{ kN}$$

Nhưng khi $M_C = 0$, ta suy ra từ hàng cuối cùng của bảng (4.6) trọng lượng bé nhất của dầm ABC là $\phi_2 = 369$kN. Vậy khi $M_C = 0$, $M_D = 0$, tổng trọng lượng của dầm liên tục là:

$$\phi_3 = \phi_2 + f_3 = 440 + 369 = 809 \text{ kN}$$

Căn cứ vào các số liệu trên, ta thành lập bảng thống kê tổng trọng lượng của dầm liên tục ứng với các giá trị khác nhau của M_c và M_D (bảng 4.7).

Bảng 4.7

$M_C = 0$	$M_D = 0$	$M_D = 100$	$M_D = 130$	$M_D = 155$	$M_D = 175$	$M_D = 190$
0	809	689	689	(689)	(705)	(729)
100	(689)	(625)	(657)	(689)	(705)	(729)
130	(689)	657	(657)	(689)	(705)	(729)
155	690	690	690	690	706	730
175	714	714	714	714	714	738
190	750	750	750	750	750	750
Min $(\phi_2 + f_3) = \phi_3$	689	625	657	689	705	729

Hàng cuối cùng trong bảng (4.7) ghi các giá trị trọng lượng bé nhất của dầm liên tục ứng với các giá trị khác nhau của M_D.

Từ các số liệu trong bảng (4.7), ta nhận thấy:

1) Nếu gối tựa D tự do, trọng lượng bé nhất của dầm liên tục là 689 kN. Ta suy ra phương án tối ưu như sau.

Khi trọng lượng của dầm liên tục bằng 689 kN, từ bảng (4.7) ta suy ra $M_C = 100$ kNm hoặc $M_C = 130$ kNm.

Thay $M_C = 100$ kNm và $M_D = 0$ vào bất đẳng thức (4.30), ta có:

$$M_{d3} \geq \max\{100\ ,\ 150\ ,\ 0\} = 150$$

Từ bảng (4.2), ta chọn $M_{d3} = 155$ kNm (tiết diện số 3):

Từ bảng (4.5), ta suy ra $M_B = 130$ và $M_{d2} = 130$ (tiết diện số 2).

Từ bảng (4.3) ta lại suy ra $M_{d1} = 190$ (tiết diện số 5).

Vậy, khi gối tựa D tự do, phương án tối ưu toàn bộ là: tiết diện số 5 (dầm AB); tiết diện số 2 (dầm BC); tiết diện số 3 (dầm CD).

2) Nếu gối tựa D bị ngàm như trong trường hợp của thí dụ, trọng lượng bé nhất của dầm liên tục là 625 kN (xem hàng cuối cùng và cột 3 của bảng 4.7). Từ bảng (4.7), ta suy ra M_D = 100 kNm và $M_C = 100$ kNm.

Thay các giá trị này vào bất đẳng thức (4.30), ta có:

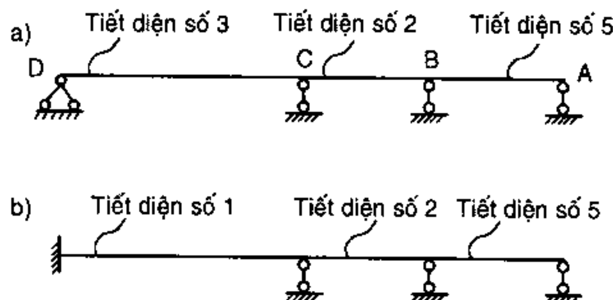
$$M_{d3} \geq \max\{100 , 100 , 100\} = 100 \text{ kNm}$$

Từ bảng (4.2), ta chọn M_{d3} = 100 kNm (tiết diện số 1).

Khi M_C = 100 kNm, ta chọn M_{d2} = 130 (tiết diện số 2) và M_{d1} = 190 (tiết diện số 5) (xem các kết quả ở phần trên).

Vậy khi gối tựa D bị ngàm, phương án tối ưu toàn bộ là: tiết diện số 5 (dầm AB); tiết diện số 2 (dầm BC); tiết diện số 1 (dầm CD).

Biểu đồ mômen ứng với phương án tối ưu toàn bộ của dầm liên tục biểu thị trên hình (4.11c). Các phương án tối ưu của dầm liên tục ứng với 2 trường hợp nêu trên biểu thị trên hình (4.12).



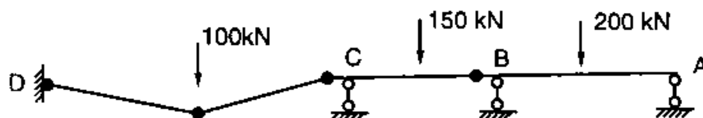
Hình 4.12

a) Phương án tối ưu khi gối tựa D tự do. Trọng lượng dầm bằng 689 kN

b) Phương án tối ưu khi gối tựa D bị ngàm. Trọng lượng dầm bằng 625 kN

So sánh 2 phương án này, ta thấy phương án dầm liên tục với gối tựa D bị ngàm kinh tế hơn.

Căn cứ vào biểu đồ mômen trên hình (4.11c), ta suy ra cơ cấu phá hoại của dầm như trên hình (4.13).



Hình 4.13

Trên cơ sở các bảng (4.3)→ (4.7), ta thành lập bảng tổng hợp (4.8). Bảng này tương tự bảng (1.16) trình bày trong §7 chương một. Qua bảng (4.8), ta thấy rõ trình tự tính toán cũng như sự chuyển tiếp từ phương án tối ưu cục bộ đến phương án tối ưu toàn bộ trong quá trình giải bài toán tối ưu tính dầm liên tục theo phương pháp quy hoạch động.

Bảng 4.8

		$M_B = 0$	$M_B = 100$	$M_B = 130$	$M_B = 155$	$M_B = 175$	$M_B = 190$
ϕ_1: Trọng lượng dầm AB	ϕ_1	275	275	225	210	210	225
	M_B	$M_C = 0$	$M_C = 100$	$M_C = 130$	$M_C = 155$	$M_C = 175$	$M_C = 190$
f_2: Trọng lượng dầm BC	0	160	128	144	160	168	180
	100	128	128	144	160	168	180
	130	144	144	144	160	168	180
	155	160	160	160	160	168	180
	175	168	168	168	168	168	180
	190	180	180	180	180	180	180
$\phi_1 + f_2$: Trọng lượng dầm ABC	0	435	403	419	435	443	455
	100	403	403	419	435	443	455
	130	(369)	(369)	(369)	385	393	405
	155	370	370	370	(370)	(378)	(390)
	175	398	398	398	398	(378)	(390)
	190	405	405	405	405	405	405
ϕ_2: Trọng lượng bé nhất của dầm ABC	ϕ_2	369	369	369	370	378	390
	M_c	$M_D = 0$	$M_D = 100$	$M_D = 130$	$M_D = 155$	$M_D = 175$	$M_D = 190$
f_3: Trọng lượng dầm CD	0	440	320	320	320	336	366
	100	320	356	288	320	336	360
	130	320	288	288	320	336	360
	155	320	320	320	320	336	360
	175	336	336	336	336	336	360
	190	360	360	360	360	360	360
$f_3 + \phi_2$	0	809	689	689	(689)	(705)	(729)
	100	(689)	(625)	(657)	(689)	(705)	(729)
	130	(689)	657	(657)	(689)	(705)	(729)
	155	690	690	690	690	706	730
	175	714	714	714	714	714	738
	190	750	750	750	750	750	750
ϕ_3: Trọng lượng bé nhất của dầm ABCD	ϕ_3	689	625	657	689	705	729

Chú thích bảng 4.8: Các số liệu trong dấu ngoặc ứng với trọng lượng bé nhất.

BÀI TẬP

Bài 1: Cực tiểu hóa hàm

$Z = 4x_1 + 2x_2 - x_3$ với các điều kiện ràng buộc:

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$

$x_2 + x_3 = 10$

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Giải theo phương pháp đơn hình.

Đáp án: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 10, x_4 = 2$, min $Z = -10$

Bài 2: Giải bằng phương pháp đơn hình:

Cực đại hóa hàm:

$Z = 2x_1 + x_2$ với các điều kiện ràng buộc:

$5x_1 + x_2 \leq 30$

$3x_1 + x_2 \leq 20$

$1,5x_1 + x_2 \leq 14$

$x_1, x_2 \geq 0$

Bài 3: Cực đại hóa hàm:

$Z = 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,5x_3 + 0,8x_4$ với các điều kiện ràng buộc:

$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 24.000$

$3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12.000$

$6x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 26.500$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Đáp án: $x_1 = 4000$; $x_2 = 0$; $x_4 = 2500$; Z max = 3.600

Bài 4: Cực đại hóa hàm

$Z = 500x_1 + 300x_2 + 200x_3 + 250x_4$ với các điều kiện ràng buộc:

$10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 2000$

$8x_1 + 5x_2 + 1,2x_3 + 5,6x_4 \leq 1800$

$5x_1 + 8x_2 + 2,5x_3 + 10x_4 \leq 2000$

Đáp án: $x_1 = 135$; $x_2 = 0$; $x_3 = 110$; $x_4 = 105$; Z max = 11575

Bài 5: Giải bằng phương pháp građiên:

Cực đại hóa hàm:

$Z = 4x_1 + 2x_2 - x_3$ với các điều kiện ràng buộc:

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$

$x_2 + x_3 = 10$

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30$

Đáp án: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10$; $x_4 = 2$; max $Z = 10$

Bài 6: Giải bằng 2 phương pháp:

1) Phương pháp tuyến tính hóa từng mẫu.

2) Phương pháp građiên.

Cực đại hóa hàm

$Z = x_1 + 2x_2 - x_2^2$ với các điều kiện ràng buộc:

$3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

Đáp án: $x_1 = 1,258$; $x_2 = 0,7906$; max $Z = 2, 213$

Bài 7: Giải bằng phương pháp quy hoạch hình học:

Cực tiểu hóa hàm:

$Z = 2x_1x_2 + 3\sqrt{x_1}$ với các điều kiện ràng buộc:

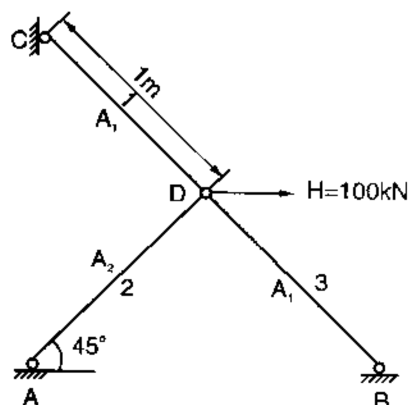
$x_1^2.x_2 \geq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

Đáp án: min $Z = 6,04$

Bài 8: Cho một kết cấu như trên hình dưới đây (hình 1). Tính trọng lượng bé nhất theo phương pháp chuyển vị. Chuyển vị ngang và chuyển vị đứng tại D ≤ 4mm. Ứng suất trong một thanh bất kì $\leq 1.10^6$ kN/m². Các thanh 1 và 3 có cùng tiết diện A_1. Thanh 2 có tiết diện A_2.

Đáp án: Thể tích bé nhất V = 241600mm³.



Hình 1

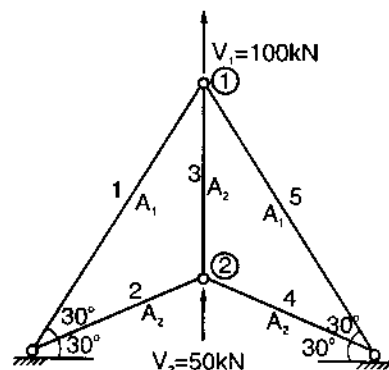
Bài 9: Cho một kết cấu như trên hình 2. Tính trọng lượng bé nhất theo phương pháp chuyển vị. Thanh 1 và 5 có tiết diện A_1. Các thanh 2, 3, 4 có tiết diện A_2 và chiều dài l = 1m.

a) Chuyển vị đứng tại các nút 1 và 2 ≤ 5mm.

b) Ứng suất σ ≤ 0,16 kN/mm².

Đáp án: a) V = 339100 mm³

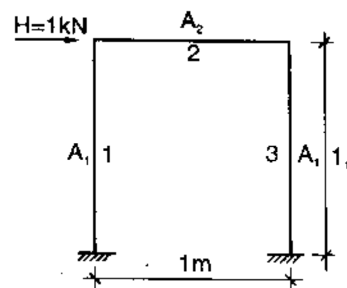
b) V = 110300 mm³



Hình 2

Bài 10: Cho một khung như trên hình 3. Tính thể tích bé nhất. Chuyển vị ngang cho phép bằng 4mm. Ứng suất uốn cho phép $\sigma = 0,15$ kN/mm². Các cột có diện tích A_1. Dầm có diện tích A_2.

Đáp án: $A_1 = 155$ mm² $A_2 = 136,3$ mm².

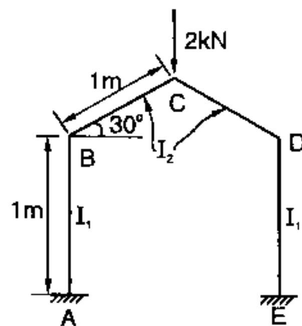


Hình 3

Bài 11: Tính trọng lượng bé nhất của khung trên hình 4. Ứng suất cho phép bằng 0,15 kN/mm². Chuyển vị đứng tại nút C ≤ 4,8 mm. Các cột có mômen quán tính I_1, các xà có mômen quán tính I_2.

Đáp án: $Z = I_1^{1/2} = 457,5$

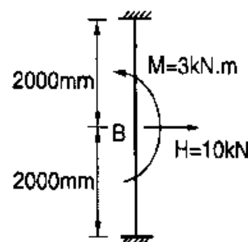
$I_1 = 0,045.\ 10^6$ mm⁴; $I_2 = 0,06.\ 10^6$ mm⁴.



Hình 4

Bài 12: Cho một kết cấu như trên hình 5. Tính trọng lượng bé nhất. Chuyển vị ngang cho phép tại B bằng 10mm. Ứng suất uốn cho phép s = 0,15 kN/mm².

Đáp án: $Z = 0,067.\ 10^9$ mm³.



Hình 5

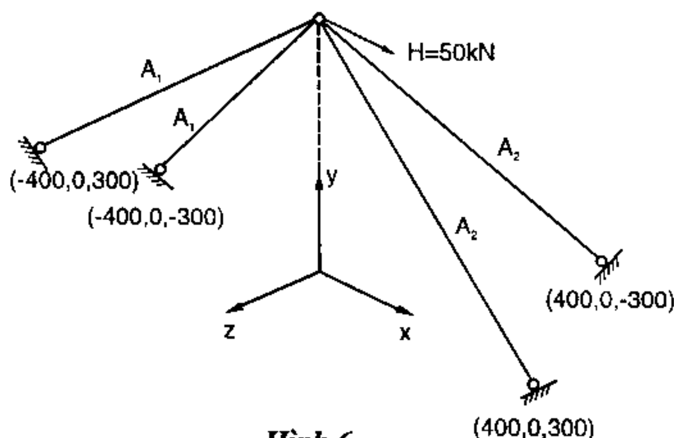
Bài 13: Cho kết cấu không gian như trên hình 6. Tính trọng lượng bé nhất. Tiết diện của các thanh biểu thị như trên hình vẽ. Ứng suất kéo cho phép bằng 0,16 kN/mm². Ứng suất nén cho phép bằng 0,1 kN/mm². Lực H nằm trên phương X. Chuyển vị tại đỉnh trên phương X ≤ 5mm. E = 207 kN/mm².

Giải bài toán phi tuyến bằng 2 cách:

1) Phương pháp đồ thị.

2) Phương pháp chuỗi Taylor để tuyến tính hóa bài toán tối ưu.

Đáp án: $A_1 = 1,208$ mm²; $A_2 = 315$ mm²; Thể tích bé nhất V = 1258940 mm³.



Hình 6

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Võ Như Cầu. *Lí thuyết tối ưu trong cơ học kết cấu.* Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 1989.
2. Bùi Minh Trí. *Quy hoạch toán học.* Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật,Hà Nội_1999.
3. Bùi Thế Tâm. *Turbo Pascal_Những chương trình mẫu trong KHKT và kỹ thuật.* Nhà xuất bản Giao thông vận tải, Hà Nội_1995
4. Nguyễn Nhật Lệ. *Tối ưu hóa ứng dụng.* Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật,Hà Nội_2001.
5. Hardly G. *Linear programming.* Addison Wesley Publ. Co. 1984
6. Hardly G. *Non linear and dynamic programming.* Addison Wesley Publ. Co. 1984.
7. Duffin Richard J. *Geometric programming.* Theory and application, 1967.
8. Prager W. A *general theory of optimal plastic design.* Trans ASME, Vol. 34, No 4. 1967.
9. Foulkes J.D. *The minimum weight design of structural frames.* Proc. Royal society A223. 1974.

MỤC LỤC

TÍNH KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU

Chịu trách nhiệm xuất bản

BÙI HỮU HẠNH

Biên tập	:	TRẦN CƯỜNG
Chế bản	:	VIỆT HƯNG
Sửa bản in	:	MINH TUẤN
Bìa	:	NGUYỄN HỮU TÙNG

In 1000 cuốn khổ 19×27cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 66/XB-QLXB-59 ngày 17-01-2003. In xong và nộp lưu chiểu tháng 7-2003.

6X4.02
XD - 2003
bb - 2003

Giá : 31.000đ